

Points sensibles en modélisation numérique des ondes

Dossier d'Habilitation à diriger des Recherches

Présentée devant
L'Université Blaise Pascal

Par
Jean-Marc PAROT
(Ingénieur civil des Ponts et Chaussées, Docteur Ingénieur, Professeur associé)
Soutenue le 7 novembre 2008

Jury

Rapporteur	BEAKOU Alexis	Professeur des Universités	IFMA/LaMI/UBP
	GOGU Grigore	Professeur des Universités	IFMA/LaMI/UBP
	GUYADER Jean-Louis	Professeur des Universités	INSA/LVA
Rapporteur	HAMZAOUI Nacer	Professeur des Universités	INSA/LVA
	KERGOMARD Jean	Directeur de Recherches	CNRS/LMA
Rapporteur	MATTEI Pierre-Olivier	HDR, Chargé de Recherches	CNRS/LMA

Points sensibles en modélisation numérique des ondes

(i) Résumé

Le document présente les différents aspects de l'expérience de Jean-Marc Parot en modélisation. L'accent est mis sur la dynamique, domaine dans lequel il enseigne depuis plus de 14 ans, et plus particulièrement sur l'acoustique numérique.

Les multiples thèmes de recherche traités en de nombreuses années sont regroupés autour de la notion d'onde, des modèles acoustiques traités par équations intégrales et de l'apport de la théorie mathématique à la modélisation.

Un appui simultané sur l'expérience et sur les outils mathématiques apporte une meilleure compréhension de la réalité et permet de rendre les modèles plus performants. Ce propos est illustré notamment par l'exemple de l'acoustique des surfaces minces et de la transformation de Hilbert en dynamique des matériaux.

Mots-Clés: acoustique – dynamique – onde – fluide – structure – rayonnement – numérique – analytique – modélisation

Sensitive issues in wave numerical modelling

(ii) Abstract

This report presents the various components of Jean-Marc Parot's professional experience. The emphasis is put on dynamics, the field in which he has been lecturing for more than 14 years, and particularly on numerical acoustics.

The numerous research issues managed over many years are put together around the wave concept, the acoustical models processed by integral equations, and the benefit of the mathematical theory for modelling.

When simultaneously based on experimental research and mathematical tools, a better understanding of reality is obtained and the models give better results. This idea is illustrated among other by the examples taken from the acoustics of thin surfaces and the Hilbert Transform used in material dynamics.

Mots-Clés: acoustics - dynamics – wave – fluid – structure - radiation – computation – calculus – modeling

UNIVERSITE BLAISE PASCAL

Présidente: Nadine Lavignotte

Institut français de Mécanique Avancée (IFMA)

Directeur: Pascal Ray

Professeurs au Laboratoire de Mécanique et Ingénieries (LaMI/IFMA/UBP)

Equipe M&M (Mécanique et Matériaux)

Autrique	Laurent
Beakou	Alexis Directeur de la Recherche à l'IFMA, Responsable de l'ERA M&M
Destrebecq	Jean-François
Grediac	Michel
Lapusta	Youri
Recho	Naman
Robert	Jean-Louis

Equipe MMS (Machines, Mécanismes et Systèmes)

Gogu	Grigore Responsable de l'ERA MMS
Ray	Pascal Directeur du LaMI

Equipe MPS (Mécanique Probabiliste des Structures)

Fogli	Michel Responsable de l'ERA MPS
Lemaire	Maurice

Remerciements

Ma gratitude va à Yves Bamberger, qui m'introduisit à la mécanique théorique,

A André Daubert et Jean-Pierre Benque, dont l'encadrement fut déterminant dans le déroulement de ma thèse il y a fort longtemps.

A Jacques Martinat, qui me fit confiance pour développer la modélisation au sein de son entreprise.

A Lionel Gaudriot, dont l'amitié et le génie inventif me fournirent le meilleur des contextes de travail.

A Robert Aquilina, dont la compétence et la rigueur furent l'aiguillon qui mena bien des études délicates au succès.

Au Professeur Claude G. Bonthoux, qui m'a recruté à l'IFMA,

Au Professeur Maurice Lemaire, qui m'accueillit au sein du LaRAMA,

Au Professeur Grigore Gogu, qui a bien voulu m'aider à parcourir ces dernières années.

A mes co-auteurs récents, Thierry Loyau, Bernard Duperray, Christophe Thirard, Christian Puillet.

A mes collaborateurs d'autrefois, et souvent co-auteurs, Jacqueline Larcher, Christian Avallet, Daniel Vaucher de la Croix.

A Nicolas Trompette, dont l'aide a été décisive pour mener à bien l'article dans « Applied Acoustics ».

A 'mes' doctorants ou stagiaires de DEA d'il y a longtemps ou plus récents, dont les questions et les doutes ont été si stimulants, Henri Debeuret, Anne-Claire Deneuvy, Lionel Perret, Franck Polonio, Antoine Pellicier.

Aux rapporteurs, Nacer Hamzaoui, Pierre-Olivier Mattei et Alexis Beakou, qui ont accepté d'évaluer ce document.

Et enfin au Professeur Jean-Louis Guyader et à Jean Kergomard, Directeur de Recherche, qui m'ont fait l'honneur et l'amitié de bien vouloir y participer.

J'ai enfin une pensée particulière pour Thierry Loyau, dont la grande pertinence scientifique et les qualités humaines nous manqueront désormais cruellement.

Sommaire

Points sensibles en modélisation numérique des ondes.....	3
Sensitive issues in wave numerical modelling	3
Professeurs	4
Remerciements	5
Avertissement sur la présentation du rapport	8
1. Un parcours atypique.....	9
1.1 Introduction.....	9
1.2 Contexte	10
1.3 CV Jean-Marc PAROT	11
2. Activité de recherche.....	13
2.1 Contexte	13
2.2 Synthèse du parcours de recherche	14
2.3 Thématique scientifique actuelle.....	16
2.4 Activité de recherche passée	16
3. Activité d'enseignement	25
3.1 Cadre général	25
3.2 Conception de Travaux pratiques.....	25
3.3 Cours écrits à destination des étudiants.....	26
3.4 Encadrement de projets	26
3.5 Concours IFMA	28
4. Ondes en mécanique.....	29
4.1 Préambule sur la modélisation	29
4.2 Différentes par nature: promenade au pays des ondes, de la géophysique à la vibration des coques nervurées.	30
5. Acoustique numérique : la course vers la haute fréquence	49
5.1 Equations intégrales en acoustique	49
5.2 Les points critiques	51
5.3 Etat actuel, bilan et perspectives	55
6. Mathématique et modélisation : quelques exemples	59
6.1 Hypersingularité dans les équations intégrales de l'acoustique: un monstre à affronter ou à contourner ?.....	59
6.2 Transformée de Hilbert, matrices de transfert, FMM : l'analytique, une technique dépassée ? ..	67
6.3 Conclusion	76
7. Apport spécifique et perspectives.....	79
7.1 Demande sociétale	81
7.2 Application d'idées personnelles	82
7.3 Renouvellement thématique	83
Annexe 1 : Choix d'articles	87
Annexe 2 : Liste des publications.....	165
Annexe 3 : Agrément au Crédit d'Impôt Recherche	171
Annexe 4 : Brevets.....	177
Annexe 5 : Liste de contrats de Recherche	179
Annexe 6 : Liste de projets de cinquième semestre et stages de fin d'études.....	185
Annexe 7 : Liste des stages techniques	187
Annexe 8 : Poste occupé précédemment	191

Références bibliographiques	195
--	------------

Avertissement sur la présentation du rapport

Le titre du rapport fait référence à des 'points sensibles' de la modélisation numérique. Au sein du texte on trouvera en effet 10 points sensibles, qui constituent autant de sujets où je pense avoir eu un apport personnel. Ils apparaissent en majuscule au début du paragraphe concerné.

Par ailleurs, la typographie suit les règles suivantes. En dehors des citations, en italiques, et des 'points sensibles', en majuscules, et du CV, on rencontre dans l'ensemble trois niveaux de typographie: chapitres et paragraphes sont en caractères de taille 12, interligne 1,5. Les sous-paragraphes numérotés par des lettres (i, ii, ...), d'intérêt plus spécialisé, sont en interligne 1. Enfin les sous-paragraphes de niveau encore inférieur, correspondant souvent à des données techniques très spécifiques, sont en caractères de taille 10.

1. *Un parcours atypique*

1.1 Introduction

Le besoin de modèles de plus en plus réalistes est une constante du développement scientifique et technique. Ce n'est qu'à ce prix que l'humanité peut prétendre avoir prise sur son environnement. Cette demande s'accompagne de l'attente de performances croissantes des algorithmes, malgré la rapide augmentation de la capacité des machines. La thèse défendue ici est que pour parvenir à cet objectif, la voie à suivre est à la fois celle de la compréhension des phénomènes, qui seule permet d'adopter la représentation la moins coûteuse, et en même temps celle de l'abstraction, qui apporte une lumière nouvelle et des solutions algorithmiques intéressantes. En fait ces deux sources s'éclairent mutuellement. L'intuition physique oriente vers l'outil mathématique adapté aux approximations pertinentes. Le concept mathématique permet à une nouvelle intuition 'a priori' non évidente de se développer, qui elle-même apporte une meilleure compréhension de la physique. Autrement dit, la vision mathématique éclaire la physique en profondeur. Mais sans le 'sens physique', qui n'est qu'attention à la réalité, l'optimisation du calcul s'avérera difficile. Pour avancer, il faut utiliser ces deux appuis, mais cela ne se fait pas sans parfois aller au rebours de quelques idées reçues.

A la suite du présent chapitre 1, rappelant les principales caractéristiques du parcours professionnel, le chapitre 2 détaille l'historique des activités de recherche, qu'elles soient publiques ou privées, en faisant référence à des listes de travaux donnés en Annexes. Le chapitre 3 décrit l'activité d'enseignement développée depuis 1993.

Les chapitres 4, 5 et 6 ont un contenu plus scientifique; ils tentent de retracer le parcours scientifique dans ses grandes lignes, en l'organisant autour de 3 fils conducteurs. Les ondes en mécanique (chapitre 4), constituent une thématique constante des travaux de l'auteur au fil des années. La modélisation acoustique par équation intégrale de surface est le thème actuel le plus actif (chapitre 5). Enfin l'apport de la théorie mathématique à la modélisation mécanique (chapitre 6) est analysé plus précisément à travers quelques exemples reliés à la théorie des distributions ou à des formules d'analyse classique.

1.2 Contexte

Ce dossier d'HDR décrit mon parcours professionnel dans le monde de la recherche. Mon profil est assez particulier, à la fois privé/public, ingénieur/enseignant, animateur/chercheur. Mon expérience est multithématique, voire transdisciplinaire, et en même temps toujours proche d'applications concrètes.

En termes de disciplines, cet itinéraire, déroulé sur 30 ans, mène de la mécanique des fluides à l'acoustique numérique, en passant par les réseaux neuronaux et le traitement de mesures dynamiques (liste non exhaustive).

En termes d'activité professionnelle, j'ai principalement oeuvré, après ma thèse, au sein de sociétés de Recherche sous contrat (SRC). Ce type d'engagement dans le secteur privé est toujours d'actualité. Cependant, depuis maintenant 14 ans, je mène aussi, parallèlement, une activité d'enseignement et de recherche au sein de l'IFMA (Institut Français de Mécanique Avancée, Ecole d'ingénieur) et du LaMI (Laboratoire de Mécanique et Ingénieries, ex-LaRAMA).

1.3 CV Jean-Marc PAROT

i. Coordonnées

20 rue de la roseraie
63540 Romagnat
France

Tél: 04 73 44 94 97, 04 73 28 80 18 (IFMA)

Fax: 04 73 28 81 00 (IFMA)

E-Mails: jean-marc.parot@wanadoo.fr, parot@ifma.fr

né le 1/2/1950 à Neuvy-Saint-Sépulcre (36)

ii. Formation :

1972 – Ecole Nationale des Ponts et Chaussées (Paris)

1976 – Thèse de Docteur-Ingénieur en Mécanique des Fluides de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6).
Mention très honorable.

iii. Synthèse des caractéristiques du parcours :

Une expérience de la recherche

Une expérience du pilotage de projets de R&D dans un contexte concurrentiel

Une expérience de l'enseignement supérieur, au sein du projet IFMA

Une expérience de la gestion d'équipe, au sein de Metravib, devenue depuis O1dB-Mettravib (groupe AREVA)

Une expérience de la vie en micro-entreprise, au sein de la sarl Imdys

iv. Activité professionnelle actuelle:

Ingénieur en modélisation et gérant auprès de la Société IMDYS (Ingénierie de Modèles en DYnamique des Systèmes),

Professeur associé à l'IFMA (Institut Français de Mécanique Avancée),

Membre du LaMI (Laboratoire de Mécanique et Ingénieries), équipe MMS (Machines, Mécanismes, Systèmes).

Intervenant auprès du CNAM Auvergne.

v. Activité professionnelle passée:

1972-1973: Ingénieur stagiaire à la Direction des Etudes et Recherches d' EDF (78 Chatou).

1973-1975: Chercheur en thèse à la Direction des Etudes et Recherches d' EDF (78 Chatou).

1976-1990: Ingénieur chef de Département au sein de la Société METRAVIB (69 Ecully).

Depuis 1990: gérant d'IMDYS.

Depuis 1993: Professeur associé à l'IFMA

1. Un parcours atypique

2. Activité de recherche

La discipline et les disciplines, le cadre et le contenu:

« Je reprends l'éloge du format : aujourd'hui comme hier, pas d'œuvre sans travail, sans le format d'un cadre pareil. De bois et de fer. Qui a vocation d'écrire y parviendra s'il entre au monastère. Couché, levé à heures régulières, penché sur l'ouvrage à durée constante, sans manquer une journée, il n'alignera ses paragraphes qu'en alignant de même ses membres et humeurs, son espace et son temps, l'ensemble de son existence, vouée. La volonté de régulation s'adapte aux régulations autonomes du corps, chaleur ou cœur, et les règle à sa norme. Anachorète, écrivain, même combat. L'Occident oublie le sens du latin 'devotio' : le sacrifice passionné de la chair. Voulez-vous écrire ? Affrontez cette mort. Sans format, dont les formes concernent aussi bien l'ouvrier que son œuvre, pas de production. Comment un athlète parvient-il à ce qu'il nomme l'état de forme ? Par un entraînement qui exige qu'il suive une règle et qu'il devienne moine, comme l'écrivain. Il s'agit là d'une condition nécessaire, qui assure, au moins, un travail bien fait, une course honorable, un rang médiocre parmi les professionnels. Pour le génie, nul n'a trouvé encore la condition suffisante. La classification des sciences et des disciplines, des articles et des thèses, les notes en bas de page, l'index ou la bibliographie, la citation loyale et l'humilité au débat... Les contraintes universitaires disciplinent la recherche et le débat. Conformez-vous au carcan du formatage... Obéissez au père-format qui règne, invisible et absent, sur le savoir absolu. Mais si vous désirez inventer, prenez des risques, laissez le format. Quitte à en mourir, devenez fils. Les grandes œuvres réunissent format et invention, discipline de fer et liberté : père et fils ».[1]

2.1 Contexte

Depuis les débuts de mon activité professionnelle, je me suis situé dans le monde de la modélisation en Mécanique. Il faut entendre ici le mot Mécanique au sens large ; il inclut la mécanique des fluides - la thèse de docteur-Ingénieur se situait dans ce domaine ; mais aussi l'acoustique, la dynamique des vibrations ; le mot 'modélisation' est lui aussi porteur de significations multiples : au-delà des modèles analytiques ou numériques discrétisés (différences finies, éléments frontières...), il a pu conduire à aborder des territoires (identification, prévision), où les aspects 'système dynamique' et 'traitement de données' l'emportent sur l'aspect proprement mécanique.

Le cadre où s'est déployée cette activité n'est pas indifférent. Ce cadre est majoritairement non-universitaire, puisque de 1976 à 1993, j'ai œuvré au sein de

sociétés de recherche sous contrat (SRC), et puisque depuis 1993, je partage mon temps entre l'IFMA/LaMI (ex-LaRAMA) et la (micro)société IMDYS, dont je suis le gérant, et qui possède toutes les caractéristiques d'une SRC (Société de Recherche sous Contrat). Au cours des 14 ans passés, théoriquement à mi-temps, à l'IFMA/LaMI, hormis les activités d'enseignement décrites plus loin, très prenantes étant donné le nombre d'heures effectuées, jusqu'à deux fois et demi le service normal certaines années, j'ai co-dirigé avec le Professeur Grigore Gogu deux thèses.

2.2 Synthèse du parcours de recherche

Dans le cadre de l'activité privée de recherche sous contrat, comme dans le cadre du pilotage des thèses, la confrontation rapide des modèles à l'expérience de terrain ou de laboratoire a été une constante incontournable. Elle fait en effet partie intégrante de la demande sociétale à la recherche appliquée: l' 'industriel', le décideur, l'élus, veulent voir des résultats concrets, pas seulement des pages de calculs ou des simulations sur ordinateur. C'est une règle de vie dans certains laboratoires de R&D du secteur privé. On peut s'en réjouir ou le déplorer, mais cette demande est très forte dans les disciplines concernées ici. La raison en est sans doute dans la proximité des applications avec la vie quotidienne des individus et des entreprises. Environnement, confort, sûreté de fonctionnement sont des thèmes qui mobilisent l'attention des citoyens et des entreprises.

Naturellement cette tendance amènerait ses effets pervers si l'on n'y prêtait pas attention: par exemple le développement de modèles à paramètres identifiés 'ad hoc', auto-justifiés par des mesures en fait non discriminantes. Ce danger est cependant assez bien identifié par les modélisateurs.

Il est des disciplines où un retour rapide à l'expérience n'est pas envisageable. Laissant de côté les mathématiques, au statut si particulier, on rencontre par exemple la physique théorique, où la vérification d'un nouveau développement des modèles demande la construction d'un système expérimental particulier, parfois gigantesque. En mécanique, la disponibilité des moyens de mesure et la relative banalité des systèmes analysés permettent généralement d'échapper à ce genre de contrainte. Cependant

l'analyse et la prévision des défaillances rares de grandes structures produites en faible nombre, voire à l'unité, rencontre une difficulté du même type: l'expérience directe n'est pas possible; on doit donc 'faire confiance' à la théorie, ou bien procéder à des validations indirectes sur des grandes séries justiciables de la même théorie.

D'une manière générale, la pertinence scientifique et technique de la démarche ne peut qu'être renforcée par le recours, interactif ou final, à une expérimentation convenablement définie; le modèle pertinent doit entre autres autoriser la définition d'une expérience de validation discriminante. Le modèle ne satisfaisant pas ce critère doit être rejeté. Une théorie 'non falsifiable', au sens de Karl Popper, n'est pas une bonne théorie. On peut se poser la difficile question de savoir si cette règle s'applique à toutes les disciplines, notamment celles mettant en jeu des probabilités d'évènements rares. Fort heureusement, elle ne concerne pas les recherches exposées ici.

Certes le chercheur aspire légitimement à développer sa théorie sans contrainte, en disposant du temps nécessaire. C'est alors qu'il pratique la discipline décrite par Michel Serres, c'est alors aussi que sa créativité peut s'exprimer. Le détour par la théorie est d'autant plus long que l'expérience est difficile. A la fin il faut bien montrer le résultat et en démontrer la pertinence.

Ce débat montre la position clairement 'interfaciale' qu'occupe l'activité modélisatrice. Mon action s'est située à la frontière du théorique et du pratique, du calcul et de la mesure, de l'universitaire formaté au sens de Michel Serres et du travail d'équipe en entreprise, traversé par l'urgence de la 'demande client'. D'un point de vue global et sur le long terme, elle peut sans doute être vue comme une action de transfert, vers de nouveaux domaines ou métiers, de méthodes de modélisation issues de la physique et de la mathématique appliquée. Les actions en cours et futures s'inscrivent toujours dans ce cadre.

2.3 Thématique scientifique actuelle

Actuellement (février 2008), les thèmes actifs peuvent être classés en deux grands domaines.

i. Linéaire à forte valeur ajoutée - Acoustique numérique :

- Rayonnement /diffraction par éléments frontières. Application aux machines ; convention LaMI / INRS et thèse d'Antoine Pellicier.
- Contrat avec l'INRS pour le développement du code Bemhole avec la société Phimeca Engineering.
- Travaux pour le CNES sur l'amélioration des performances d'un algorithme temporel (code Astryd).
- Modélisation de barrières acoustiques en tubes compliant.
- Modèle dynamique du système roue – pneumatique pour une société du secteur automobile.

ii. Non linéaire :

- Modélisation et identification de composants déformables en grand déplacement avec frottement de Coulomb (action en réseau avec une SRC).

2.4 Activité de recherche passée

Les travaux passés ont été peu valorisés par des publications dans des revues internationales. Certains ont été, ou sont encore, soumis à confidentialité. Cependant, pour la partie publiable, il conviendrait d'agir fortement pour compenser le manque dans ce domaine. Le déroulement de ce processus est encore lent. La publication des résultats rentre en conflit non seulement avec les impératifs de confidentialité, mais aussi avec les contraintes de rentabilité de l'activité de recherche sous contrat. Il serait donc souhaitable, pour une évaluation correcte de mon activité de recherche (et 'autour de la recherche'), qu'elle ne soit pas effectuée sur la seule base des publications dans des revues internationales, même si ce critère est très préférentiellement retenu dans le

milieu universitaire. C'est pourquoi je recense d'autres critères, dont l'intérêt ne paraît pas moindre.

i. Agrément au crédit d'impôt recherche :

La micro-société où je déploie mon activité est agréée par le Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche pour le crédit d'impôt Recherche. Ceci signifie que les sociétés clientes peuvent, dans une certaine limite, déduire le montant de leurs commandes du montant de leur impôt sur les sociétés. Cette mesure a pour objectif le soutien des investissements en recherche du secteur privé. L'agrément s'obtient sur dossier et doit être renouvelé régulièrement. Le dossier, qui doit être illustré d'exemples de travaux récents, est examiné par des experts du ministère, qui décident ou non de l'agrément. La région Auvergne compte très peu d'organismes agréés : une douzaine en 2001, en dehors des structures de recherche publique. L'agrément CIR est synonyme de recherche totalement autonome validée par le marché.

Exemple de dossier : voir en 'Annexe 3 : Agrément au Crédit d'Impôt Recherche' la partie technique du dossier 2004. L'agrément a été accordé pour la période 2004-2006 après avoir été reconduit depuis 1999.

ii. Contrats :

On se limite aux contrats de volume conséquent où j'ai eu une contribution importante, dans certains cas prépondérante. Parmi les organismes contractants on remarque les organismes de recherche rattachés à la Marine nationale, le CNES, le CEA, le Ministère de l'Environnement, mais aussi des sociétés privées : Michelin, BioMérieux entre autres. Certaines actions se sont inscrites dans un cadre européen.

Voir l'Annexe 5 : Liste de contrats de Recherche.

iii. Programmes et logiciels

On récapitule dans le Tableau 1 les plus marquants des programmes importants auxquels j'ai explicitement participé.

Nom du code	Maître d'oeuvre	Fonctionnalité	Principe mathématique	Sujet toujours actif en 2008
Zephyr	CEA Saclay	Calcul de diffraction acoustique	Potentiels retardés	Information manquante pour trancher
Astryd	01dB-metravib / CNES	Acoustique et Vibro-acoustique	Equations intégrales en temporel couplées aux EF de structure	oui
Bemhole	INRS	Rayonnement acoustique	Equations intégrales en fréquentiel	oui
Gap	DCN Toulon	Rayonnement acoustique de sous-marin	Matrices de transfert	Sujet actif encore en 2004.

Tableau 1: codes et logiciels

La traduction des concepts dans un logiciel d'application et d'utilisation pratique est l'aboutissement classique d'un travail de modélisation, même si la modélisation peut aussi servir à autre chose (comprendre, analyser) ou peut parfois conduire à des outils beaucoup plus légers.

iv. Brevets

J. CHARLES, L. GAUDRIOT, J-M PAROT: Procédé et dispositif de positionnement acoustique sous-marin et de visualisation dans une structure connue immergée en treillis tubulaire. Brevet français déposé par Metravib SA, sous le numéro 83 09026.

J. CHARLES, L. GAUDRIOT, J-M PAROT: Procédé et dispositif de recherche et de caractérisation de défauts d'une structure métallique connue immergée. Brevet français déposé par Metravib SA (n° 84 01426), brevet américain déposé sous le Patent Number 4,628,437 en date du 16 Décembre 1986.

Voir l'Annexe 4 : Brevets.

L'enjeu principal de ces brevets concerne la surveillance des structures off-shore, du type plates-formes pétrolières. Avec le premier brevet, on propose de positionner un système sous-marin, éventuellement robotisé, par voie acoustique. Les échos des éléments du treillis structural, de géométrie connue, permettent par calculs simples de se positionner et d'avoir une vision de la structure en l'absence de toute visibilité optique ou électromagnétique. Le second brevet exploite les variations de réponse des barres creuses constituant le treillis à une impulsion sonar, pour évaluer leur état structural, ceci sans être

géné par les organismes marins qui peuvent envahir rapidement ce type de construction sous-marine.

v. *Séminaires invités présentés devant des organismes de recherche*

- Exemples d'instabilités en dynamique, Laboratoire de Physique théorique, CNRS Marseille (1988)
- Modèles en acoustique et vibration, Laboratoire de Physique théorique, CNRS Marseille (1988)
- Instabilités dynamiques et chaos, Laboratoire de biométrie, CNRS Villeurbanne (1990)
- Autosimilarité fonctionnelle et dynamique des structures, Mini-colloque « Dynamique des structures en moyennes fréquences », Centre d'études et de recherches sur la discrétion acoustique (CERDAN) de la DCN Toulon, novembre 1990.
- D. Bondoux, J-M Parot: Traitement de données expérimentales et modèles de prédiction. Mini-colloque « Dynamique des structures en moyenne fréquence », Centre d'études et de recherches sur la discrétion acoustique (CERDAN) de la DCN Toulon, novembre 1990.

vi. *Séminaires internes*

- Instabilités dynamiques, LaRAMA de l'IFMA (1994)
- Modèles en vibration moyenne fréquence, LaRAMA de l'IFMA (1995)
- Acoustique numérique, LaRAMA de l'IFMA (1997)
- Usure ondulatoire par freinage de roues ferroviaires, LaRAMA de l'IFMA (2000)

vii. *Conférencier invité:*

- aux Journées SIA « Automobile et environnement », sur le thème des réseaux neuronaux appliqués au confort et à la gêne (Sochaux, Février 1994) : J-M Parot: Une méthode adaptative pour l'estimation du confort.
- au Congrès ICA sur le thème de la FMM (Madrid, Septembre 2007): J-M Parot, A. Pellicier: Fast Multipole Method for Acoustic Computation.

viii. *Liste des publications, classées par thème:*

On donne ici seulement la liste des articles de revue. La liste complète des 63 publications (plus une en cours de révision) est jointe en Annexe 2 : Liste des publications. En **surligné** les articles de revue internationale à comité de lecture. Ils sont au nombre de 6

2. Activité de recherche

dans des revues actuellement référencées dans la liste ‘Thomson’, mais au nombre de 8 si on admet dans la liste le Journal d’Acoustique, disparu en 1992 pour se fondre dans ‘Acta Acustica united with Acustica’.

Revue	I. F.	Année
Acta Acustica united with Acustica	0.5	2006
Applied Acoustics	0.5	2006
Engineering Analysis with Boundary Elements	0.9	2006
La Houille blanche – revue internationale de l'eau	0.1	2006
Mechanics of Materials	2.1	2006

Tableau 2: "Impact factor"

Mécanique vibratoire

Cette thématique couvre le formalisme modal et des développements très particuliers faisant jouer un grand rôle au calcul analytique ou semi-analytique.

- L. Gaudriot, J-M Parot : L'évolution des méthodes d'étude des systèmes vibratoires. Principes de la synthèse modale de structures vibrantes. Revue française de Mécanique, n° 60, p. 9-27, 1976.
- C. Avallet, J-M Parot : Recherche d'ondes naturelles de coques cylindriques raidies périodiquement, Revue du Cethedec n° 71, 1982, p. 159-173.
- J-M Parot, D. Vaucher de la Croix : Sur la dynamique de structures ramifiées simples. Mécanique, Matériaux et Electricité n° 416, 1986, p. 52-54.

Mécanique des fluides

Il s'agit ici du sujet de la thèse de docteur-ingénieur.

- J-M Parot : Quelques aspects des écoulements bicouches quasi-horizontaux et de leur calcul. La Houille Blanche, 1976 (n°1), p. 53-58.

Couplage fluide-structure et Acoustique

Le couplage fluide-structure est abordé d'abord sous l'angle de l'effet d'une onde sur une coque, puis sous celui du rayonnement de structures en vibrations. Les méthodes de calcul sont variées: analytiques au début, numériques ensuite, jusqu'aux développements récents concernant la FMM. Les systèmes de cavités ouvertes occupent une place à part, puisqu'il s'agit pratiquement d'un thème aéroacoustique.

- J-M Parot : Calcul de la réponse dynamique d'une coque à une onde d'explosion. Mécanique, Matériaux et Electricité n° 389-390-391, 1982, p. 343-348.

2. Activité de recherche

- H. Arbey, J. Delcambre, L. Pargamin, J-M Parot : Son pur émis par un système de cavités périodiques ouvertes soumis à un écoulement. *Revue d'Acoustique* n° 67, 1983, p. 243-246.
- J. Larcher, J-M Parot: Interaction entre le champ hydrodynamique dû à une explosion et un corps élastique immergé. *Mécanique, Matériaux et Electricité* n°434, mai-juin 1990, p. 61-63.
- F. Polonio, T. Loyau, J-M Parot, G. Gogu: Prévion du rayonnement acoustique en basse fréquence de structures ouvertes. *Acoustique et Techniques* n°36, mars 2004, p. 37-43.
- F. Polonio, T. Loyau, J-M Parot, G. Gogu: Acoustic radiation of an open structure: modelling and experiments. *Acta Acustica united with Acustica*, (90), 2004, p. 496-511.
- J-M Parot, C. Thirard, C. Puillet: Elimination of a non-oscillatory instability in a retarded potential integral equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 31/2, 2007, p. 133-151.
- J-M Parot, A. Pellicier, T. Loyau, G. Gogu: Fast mutipole method for acoustic radiation computations. *Proposé à Acta Acustica united with Acustica*, juillet 2007.

Traitement de mesures

Avec cette thématique transversale, on aborde à la fois le traitement de données mesurées en vibration, en viscoélasticité et en acoustique. L'idée de base des 3 articles récents est d'utiliser des principes physiques très généraux et une étape de calcul pour faire parler davantage les données. Le premier article est plutôt une remarque de modélisateur dans le cadre du questionnement sur les structures floues.

- J-M Parot: Une distance entre systèmes linéaires. *J. d'Acoustique* (3) 1990, p. 9-15.
- J-M Parot, B. Duperray: Applications of exact causality relationships to materials dynamic analysis. *Mechanics of Materials*, vol. 39/5, 2007, p. 419-433.
- J-M Parot: Localizing impulse sources in an open space by time reversal with very few transducers. *Applied Acoustics*, vol. 69/4, 2008, p. 311-324.
- J-M Parot, B. Duperray: Exact computation of creep compliance and relaxation modulus from complex modulus measurement data. *Mechanics of Materials*, vol. 40/7, 2008. p. 575-585.

ix. *Activité de révision d'articles:*

J'ai été sollicité par 'Applied Mathematical Modelling' en avril 2007. J'ai révisé un article pour 'Mechanics of Materials' en mai-juin 2007, puis un autre en 2008. J'en ai enfin révisé un pour 'Applied Acoustics' de décembre 2007 à mars 2008.

x. *Encadrement de thèses :*

Co-encadrement avec G. Gogu et membre du jury :

2. Activité de recherche

- **Franck Polonio** (Mention très honorable) : Calcul du rayonnement acoustique d'une structure d'épaisseur moyenne comportant des ouvertures. Thèse présentée le 02/05/02 devant l'Université Blaise Pascal en Génie Mécanique. Jury : Guyader, Garcia, Gogu, Habault, Loyau, Parot. Carrière ultérieure : professeur de mathématiques dans l'enseignement secondaire.
- **Antoine Pellicier** (Mention très honorable avec félicitations) : Algorithme de calcul accéléré pour les structures rayonnantes à vibration sous-critique. Thèse présentée le 26/01/07 devant l'Université Blaise Pascal en Génie Mécanique. Jury : Guyader, Hamzaoui, Lavie, Gogu, Loyau, Parot. Carrière ultérieure : embauché par la société SECAV (Marseille), pour travailler sur la FMM sur un contrat de R&D.

Co-encadrement et membre du jury :

- **Anne-Claire Deneuvy** : Etude d'un problème de conception optimale avec critère sur les fréquences pour un système couplé fluide-structure. Thèse présentée le 26/06/86 devant l'Ecole centrale de Lyon en Mathématiques appliquées. Jury: Baranger, Bendsoe, Brauner, Chenais, Maître, Ohayon, Parot, Sidoroff. Carrière ultérieure : chargée chez Michelin des relations avec l'université, puis consultante senior en gestion de carrière chez Altedia.

Membre du jury :

- **Christian Avallet** : Comportement dynamique de milieux poreux saturés déformables. Thèse présentée devant l'Université scientifique et médicale de Grenoble le 16/09/81. Jury : Pierrard, Auriault, Parot (rapporteur extérieur), Darve. Carrière ultérieure : ingénieur Metravib puis Novatome.
- **Lionel Borne** : Contribution à l'étude du comportement dynamique de milieux poreux saturés déformables. Etude de la loi de filtration dynamique. Thèse présentée le 29/09/83 devant l'Université scientifique et médicale et l'Institut national polytechnique de Grenoble. Jury : Germain, Auriault, Chambon, Parot (rapporteur extérieur), Biguenet. Carrière ultérieure : inconnue.
- Thèse Cnam: documents permettant son référencement non retrouvés !

Co-encadrement du doctorant :

- **Henri Debeuret**: Interaction d'une onde de choc cylindrique faible avec une coque immergée dans le cas bidimensionnel. Thèse de docteur-Ingénieur présentée le 14/05/1980 devant l'INSA de Lyon, l'Université Claude Bernard et l'Ecole Centrale de Lyon. Jury: Lalanne, Aquilina, Gaudriot, Mathieu, Rieutord. Carrière ultérieure : fondateur et PDG de cabinet de recrutement (Cadriciel, Lyon).

2. Activité de recherche

Henri Debeuret
Le verger
01700 NEYRON

Monsieur Jean Marc Parot
Lot. Les peupliers
63540 ROMANJAT

Le 15 juin 2001

ATTESTATION

Je sous-signé Henri Debeuret certifie avoir réalisé de 1976 à 1980 une thèse de Docteur-ingénieur (N° d'ordre IDI 3 8004) présentée devant

L'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon
L'Université Claude Bernard Lyon 1
L'Ecole Centrale de Lyon

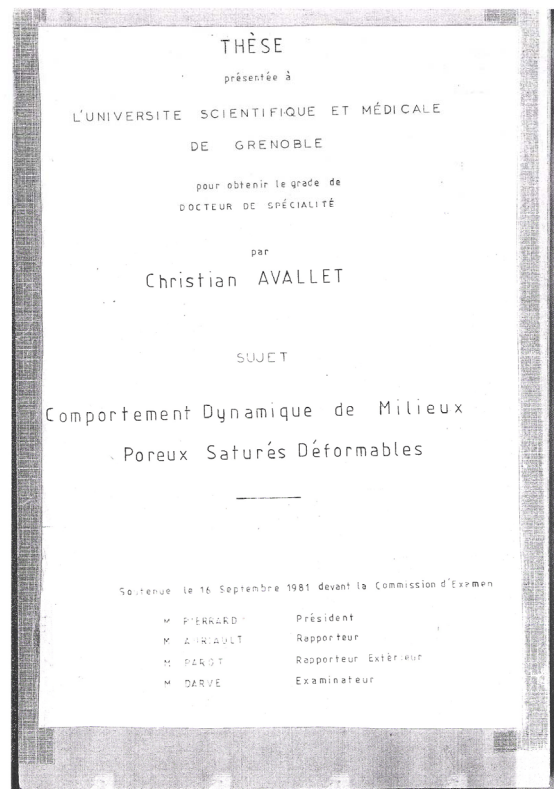
le 14 mai 1980

sous le co-encadrement du Professeur Emile Rieutord, Directeur du Laboratoire de Mécanique des Fluides et Thermique de l'Insa de Lyon et de Monsieur Jean Marc Parot, Chercheur de la société MSTRAVIS, chemin des mouilles, Ecully, dans les proportions respectives de 75% et 25%.

Pour valoir ce que de droit.



Henri Debeuret



N° d'ordre

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE
ET
L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE
DE GRENOBLE

pour obtenir le titre de
DOCTEUR-INGÉNIEUR

par

Lionel BORNE
Ingénieur T.P.E.

S U J E T

**Contribution à l'étude
du comportement dynamique
des milieux poreux saturés déformables.
Etude de la loi de filtration dynamique.**

Soutenue le 29 Septembre 1983 devant la Commission d'Examen

M. J.-P. GERMAIN	Président
M. J.-L. AURIAULT	Rapporteurs
M. R. CHAMBON	
M. J.-M. PAROT	Rapporteur extérieur
M. G. BIGUENET	Invité

GRENOBLE

N° d'ordre: ECL 86-06

Année 1986

THÈSE

présentée devant

L'ÉCOLE CENTRALE DE LYON

pour obtenir

le titre de DOCTEUR

Spécialité : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Anne-Claire Deneuvy

**ETUDE D'UN PROBLÈME DE CONCEPTION OPTIMALE
AVEC CRITÈRE SUR LES FRÉQUENCES
POUR UN SYSTÈME COUPLE FLUIDE-STRUCTURE**

Soutenue le 26 juin 1986 devant la Commission d'Examen

JURY : J. Baranger (Président)
M.-P. Bendsee
C.-M. Brauner
D. Chenaïs
J.-F. Maître
R. Ohayon
J.-M. Parot
F. Sidoroff

xi. Encadrement de DEA, puis de Master Recherche :

Comme ingénieur:

- **Jaddi El Houcine:** Mise au point numérique d'une méthode intégrale à propos de la diffraction du son par un obstacle. Ecole centrale de Lyon, 1983. Carrière ultérieure: inconnue.
- **Lionel Perret:** Validation d'un programme de calcul traitant l'interaction entre une source acoustique et une structure. Ecole centrale de Lyon, 1986. Carrière ultérieure: chef de projet au CNES.

Comme professeur associé:

- **Marc Délérís:** Simulation de déploiement d'airbag. Université Blaise Pascal/IFMA/LaRAMA, 2002. Carrière ultérieure: inconnue.
- **Gregory Guire:** Caractérisation dynamique de structure mécanique: applications aux liaisons sol. Université Blaise Pascal/IFMA/LaMI, 2007. Carrière ultérieure: doctorant au LaMI.

xii. Affiliation à des Sociétés

Ancien membre de la Société des Ingénieurs de l'Automobile,
Membre de la Société Française d'Acoustique.
Membre de l'Association Française de Mécanique (AFM / AUM).

3. Activité d'enseignement

3.1 Cadre général

Elle a débuté à l'IFMA en 1993. J'ai mis en place l'enseignement de dynamique de troisième année; je l'ai voulu ouvert sur l'acoustique, en y introduisant une touche d'acoustique non prévue au départ. Responsable de cette UV (niveau bac +5) depuis l'origine, j'en ai assuré jusqu'en 2006 les différents aspects (Cours, Travaux Dirigés, Travaux Pratiques, Travaux Personnels), avec le concours d'autres enseignants.

Depuis 2006, je coordonne la nouvelle UV DSD (Dimensionnement statique et dynamique), qui regroupe deux UV précédemment enseignées, dont la Dynamique. Plus grosse UV du quatrième semestre, elle est animée par une équipe de 4 personnes.

J'ai contribué pendant plusieurs années à l'enseignement de la Mécanique des milieux continus en première année (Travaux Dirigés, Travaux Pratiques, Travaux Personnels) sous la responsabilité du Professeur M. Lemaire.

3.2 Conception de Travaux pratiques

La charge d'introduire la Dynamique à l'IFMA m'a conduit à la conception et à la mise en place d'environ 20 nouveaux Travaux pratiques en Dynamique : vibration de machine, absorbeur dynamique, stabilité et instabilité en Usinage Grande Vitesse, mesures au sonomètre, analyse modale expérimentale, analyse acoustique d'échappement de moto, contrôle actif de vibration, mesure de matériaux au viscoanalyseur, acoustique numérique de la diffraction, vibration non linéaire, etc...

Parmi ces TP, certains ont été réutilisés dans d'autres cadres :

- TP utilisés en UV MCR (Mécanismes en conditions réelles, MMS2A): vibration de machine sur plots, absorbeur dynamique, optimisation de l'Usinage Grande Vitesse, contrôle actif de vibration, analyse modale expérimentale, vibration non linéaire, calcul de « crash » avec le code Radioss.

- TP repris par d'autres formations dans le cadre de Mec@prod : stabilité et instabilité en Usinage Grande Vitesse.
- TP utilisé au concours de l'agrégation : vibration de maquette machine.
- TP repris en UV MSI 1A: vibration de maquette machine
- TP sur le viscoanalyseur, utilisé en enseignement de matériaux et par l'UBP.

3.3 Cours écrits à destination des étudiants

- un recueil d'exercices de dynamique (28 pages sans les corrigés, 101 pages avec les corrigés, non diffusés aux étudiants, document exploité par A. Chateauneuf pour définir certaines parties du cours de Mathématiques pour l'Ingénieur),
- des éléments de cours de dynamique (88 pages pour la partie J-M Parot, 150 transparents environ pour la partie C. Bouzgarrou).
- un polycopié sur le couplage fluide-structure, utilisé pour les cours CNAM.
- un projet d'ouvrage en co-écriture avec Thien Phu Le et Chedli Bouzgarrou, tous deux enseignants IFMA, fait l'objet d'un contrat avec les éditions 'Ellipses'.

3.4 Encadrement de projets

Comme chaque enseignant, j'ai assuré l'encadrement de nombreux Projets de quatrième semestre, de cinquième semestre, et de fin d'études: ci-dessous on trouve la liste des derniers projets de fin d'études. Programmé au semestre 8, le PFE est le plus important pour les étudiants. Comme on le voit dans la liste, limitée à 1999, son contenu atteste du lien avec la R&D industrielle sur un vrai projet d'ingénieur. En Annexe 6 :

3. Activité d'enseignement

Liste de projets de cinquième semestre et stages de fin d'études), on trouvera les plus récents des projets de cinquième semestre ainsi que les stages de fin d'études. Au total depuis 1993, on peut évaluer le nombre de projets et de stages encadrés à environ **une centaine**.

MARTZ Jocelyn	2007	LaMI AUBIERE	Parallélisation d'un algorithme de rayonnement acoustique et mise en œuvre sur cluster
GOIGOUX Vincent	2006	FAURECIA SYSTEME D' ECHAPPEMENT VALENTIGNEY	Etude paramétrique d'un silencieux à faible contrepression
VOILLE-QUIN Jérôme	2006	TENNECO AUTOMOTIVE - HEINRICH GILLET GMBH EDENKOBEN	Modelling of the cavity from exhaust systems by finite elements
DULEY Paul Antoine	2004	BOUYGUES BATIMENT ILE DE FRANCE - OUVRAGES PUBLICS COURBEVOIE	Etude des contraintes acoustiques dans les bâtiments d'OP et analyse des différences de performances
PARIENTE Marc	2003	VALEO SYSTEMES D'ESSUYAGE ISSOIRE	Modélisation de la déformation des portes balai d'essuie-glace
BECKER Philippe	2002	EUROSIM MONTBELIARD	Modélisation de crash automobile frontal à l'aide du logiciel Radioss
LOUSTAU Philippe	2002	ODEGAARD & DANNESKIOLD - SAMSOE COPENHAGEN	Réponse mécanique d'une canalisation issue d'un compresseur alternatif
NOËL JEAN-FRANÇOIS	2001	LaRAMA AUBIERE	Analyse en simulation du rayonnement de structures ouvertes, avec le code Astryd

3. Activité d'enseignement

	2000	GAZ DE FRANCE	Développement d'une feuille Excel synthétisant diverses modélisations simples des effets d'explosions sur des bâtiments
LALOI NATHALIE	1999	VALEO ISSOIRE	Etude du broutement d'essuie-glace

Les stages techniques de seconde année en forment une grande partie. Ils ne seront pas listés ici, cette lecture serait fastidieuse.

Enfin, J'ai encadré deux 'Tesi de Laurea', travaux de recherche de fin d'études des Etudiants du Politecnico di Torino :

- Sergio Megliola : Etude théorique et expérimentale sur le frottement sec, 1995.
- Mario. Meliga : Etude sur la caractérisation dynamique du phénomène de frottement sec, 1995.

3.5 Concours IFMA

Participation aux commissions du concours d'entrée assurant les entretiens avec les candidats, et ceci en tant qu'ingénieur ou enseignant, selon les besoins, depuis 1993.

4. Ondes en mécanique

4.1 Préambule sur la modélisation

Mathématiques et réalité, existence et abstraction :

« Toutes chose jaillissent de notes : pour dire ce qui coule dans le Grand récit, les cosmologistes, physiciens et biochimistes, récents, rejoignent les anciens pythagoriciens qui voyaient partout des nombres.

Sans les adéquations entre ces deux abstractions, celle qui me constitue et celle qui forme le monde, nulle science, aucune connaissance, ni langage, rigoureux ou intuitif, ni musique ni poésie, ni croyance ni amour, ne naîtraient. Sans elles, la mathématique ne parlerait pas universellement, nous resterions étrangers au monde.

*Que le réel naisse du formel, ce paradoxe qui étonne s'efface aussitôt que l'on comprend que l'abstrait se soutient entre néant et existence et, passant de l'un à l'autre, fait le pont entre les deux. A-t-il jamais eu d'autre statut ? ni le concept ni le cercle, ni le concept de cercle, n'existent, ici et maintenant ; mais qui peut dire qu'il n'existe pas d'une certaine façon ? Certains disent même, et je les approuve, que le cercle jouit d'une existence réelle, quoique non empirique; les entités mathématiques existent puissamment sur ce mode intermédiaire, entre le néant et le sensible. L'expérience des choses elles-mêmes rencontre des contraintes qui témoignent de leur existence ; d'autres, plus dures encore, conduisant à la rigueur de la démonstration, persuadent le pratiquant de l'existence inévitable de ces entités. Or ce mode, abstrait, d'existence, permet, on le sait, d'expliquer le monde réel, le vivant, le technique et parfois même les cultures musicales et leur beauté, de les comprendre et d'en rendre raison. Ils constituent, de plus, le tissu de réalité des choses que rencontrent le travail, la perception et les conduites. Cette abstraction les fait advenir à la réalité. **Infiniment léger, le formel accouche du réel.***

Ce que les sciences humaines appelaient histoire devient souvent science et ce que les sciences dures nommaient science devient parfois histoire.» [1]

La modélisation poursuit alternativement deux buts: prévoir et identifier. Prévoir un comportement futur dans des conditions à advenir. Identifier les caractéristiques intérieures d'un objet ou d'un système, inaccessibles à la mesure, à partir d'observations extérieures. L'identification peut aussi être étendue en optimisation: étant donné un comportement désiré (et non plus une mesure réelle), trouver les caractéristiques qui permettront de l'obtenir. Ce dernier aspect, peu abordé par l'auteur, ne fait pas partie des travaux présentés.

Mais les travaux présentés dans ce dossier possèdent pourtant les deux premières polarités, prévision et identification, c'est-à-dire modèle direct et modèle inverse, même si l'approche 'modèle direct' est prédominante. L'article [2] quant à lui se situe dans la veine "modèle inverse" (article joint).

Dans ce chapitre 4, ce n'est pourtant pas cette dichotomie qui va nous guider. Le point de vue adopté se rapproche davantage de celui de Michel Serres, lorsqu'il écrit « *ce que les sciences dures nommaient science devient parfois histoire.* » En effet, en réunissant toutes les ondes étudiées que j'ai étudiées, on obtient une sorte d'histoire naturelle des ondes en mécanique, certes très incomplète, mais qui n'est pas dépourvue d'un certain pittoresque. Cependant, comme Michel Serres le fait remarquer, les êtres dont on aperçoit ici une partie du zoo sont des êtres abstraits, dont la nature est d'abord mathématique. Leur classification peut se faire de deux manières:

- par leurs caractéristiques physico-mathématiques,
- par la façon de les représenter, c'est-à-dire en fonction du parti pris du modélisateur, qui décide de voir en elles telle ou telle fonction comme prédominante, et donc d'utiliser la base la mieux à même de traduire cette caractéristique prédominante.

Seule sera suivie la première voie. La seconde voie ne manque pas d'intérêt, mais elle dépasse le cadre de ce rapport, et elle sera abordée indirectement au § 6.2.

4.2 Différentes par nature: promenade au pays des ondes, de la géophysique à la vibration des coques nervurées.

i. *Ondes guidées en guide fermé*

POINT SENSIBLE N°1: L'EXTREME DISPARITE DES ATTENUATIONS DANS LES PIPE-LINES ENTERRES S'EXPLIQUE PAR LE COUPLAGE AU SOL ET SE REPRESENTE PAR UNE SIMPLE FORMULE EXPLICITE.

Les conduites de fluide posent de nombreux problèmes de dynamique. Parmi elles, les pipe-lines occupent une place privilégiée, par la taille et l'enjeu stratégique, environnemental et sécuritaire de ces équipements. Des dispositifs de surveillance sont installés le long de ces conduites. Ils sont basés sur différents phénomènes physiques. Un des systèmes est destiné à la détection des fuites et des chocs par voie acoustique selon le principe bien connu de l'intercorrélation des bruits mesurés sur deux capteurs [3]. La

distance entre capteurs conditionne le coût du système, installé qu'il est sur des centaines de km. Pour choisir la bonne valeur de ce paramètre critique, il convient de connaître l'atténuation de l'onde porteuse du signal.

Quelle est la nature de cette propagation ? Selon des témoignages, les riverains de certains pipe-lines enterrés perçoivent un grondement provenant du sol. Ce serait le rayonnement vibro-acoustique du pipe-line dans le sol qui se transmettrait ensuite à l'atmosphère. C'est dire si la propagation dans le pipe-line concerne aussi le milieu environnant, et à quel point une énergie provenant du pipe-line est dissipée par rayonnement. Cette propagation et l'atténuation associée ont fait l'objet d'une étude détaillée dans [4].

Le problème est donc celui du couplage fluide interne – structure – sol (Figure 1). On néglige la présence de la surface, et on considère le milieu externe comme un solide ou même un fluide homogène.

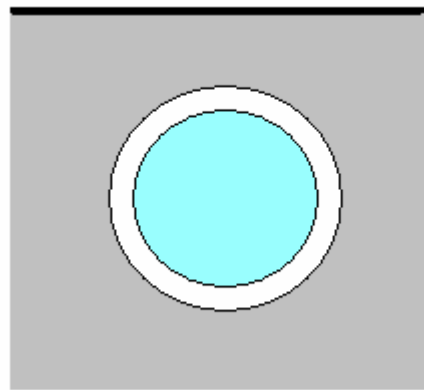


Figure 1: Schéma du système (section transversale)

Bien que le sujet soit très ancien, des travaux récents ont encore été menés sur les divers modes de propagation, l'influence du fluide emplissant la conduite, ainsi que celle d'un solide ou d'un liquide l'entourant.

Une description complète de l'atténuation doit prendre en compte les différentes causes de perte d'énergie acoustique : rayonnement dans le milieu, échanges thermiques, pertes dans les matériaux, diffusion sur les hétérogénéités. Ici l'attention se concentre sur le cas des pipe-lines enterrés, où le rayonnement dans le sol risque d'être la cause prédominante d'atténuation. On prend en compte les divers cas de fluide interne (liquide, gaz) et de tube (épais, mince, selon la pression du fluide). On ne s'intéresse qu'aux basses fréquences, car l'atténuation est rédhibitoire aux fréquences plus élevées. Le mode appelé 'mode α ' est nettement le plus favorable à la surveillance des pipe-lines, car le moins dispersif et le moins atténué. Il s'agit du mode, principalement acoustique, d'onde plane fluide entraînant un gonflement, généralement faible, du tuyau. Il existe déjà dans les conduites *in vacuo*, sans milieu environnant. Si la conduite est très rigide par rapport au fluide interne, la propagation se fait à la vitesse du son dans le fluide. Avec une conduite souple, l'onde ' α ' est ralentie, et ce d'autant plus que la conduite est plus souple relativement au fluide. *In vacuo* cet effet est le seul couplage existant. Mais quand le pipe-line est enterré ou immergé, un second couplage intervient. Le milieu extérieur peut

apporter masse ajoutée (effet d'inertie) ou amortissement par rayonnement. Ceci dépend de la célérité de l'onde ' α '. Le milieu apporte de la dissipation par rayonnement, lorsque l'onde portée par la canalisation se propage à une vitesse qui dépasse celle des ondes dans le milieu. Ceci est vrai que le milieu externe soit modélisé comme un fluide ou un solide. La célérité de l'onde elle-même est conditionnée par la masse ajoutée, et bien sûr les caractéristiques propres du conduit et du fluide interne. On rencontre là un couplage 'fort', comme habituellement dans les fluides lourds, tels que l'eau; lourds par opposition aux fluides légers, dont l'air ambiant est l'exemple classique. Un modèle couplé fluide-structure-sol complet serait assez complexe à traiter. On fait donc des approximations autorisant une résolution simplifiée.

Le développement du modèle reproduit globalement la démarche de l'article [5]. On suit une formulation analytique qui a déjà été pratiquée dans le contexte de l'interaction onde-structure sur les coques de sous-marins soumis à des explosions [6, 7]. La fréquence étant fixée, on part d'un opérateur de coque en mode axisymétrique, on lui couple les milieux interne et externe, où les solutions sont des fonctions de Bessel (intérieur) et de Hankel (extérieur) d'ordre zéro. L'hypothèse 'basse fréquence', c'est-à-dire de longueurs d'onde vibratoire et acoustique grandes devant le diamètre, permet des approximations dans l'expression de ces fonctions. La détermination des caractéristiques de l'onde ' α ' demande cependant encore la résolution d'une équation dans le domaine complexe. Cette équation a deux solutions correspondant au mode 'acoustique ' α ' et au mode 'vibratoire de structure'. Avec l'hypothèse d'une célérité des ondes longitudinales de coque très supérieure à la vitesse du son dans le milieu ambiant, les deux ondes se découplent. On suppose de plus la structure assez rigide pour que l'impédance de rayonnement dans le milieu puisse être traitée comme une quantité du premier ordre devant l'impédance interne de la structure.

De surcroît on admet que les impédances de rayonnement selon les deux ondes du sol sont égales, approximation grossière mais pertinente au vu de la grande dynamique des situations possibles.

Au prix de toutes ces hypothèses, on aboutit alors à une formulation explicite de la célérité complexe de l'onde ' α ', et donc à une expression de l'atténuation, en dB/m:

$$20\varepsilon \log(e) \pi \sqrt{2} \rho_m c_f^2 \left(\frac{\rho_f a}{Eh} \right)^{3/2} \frac{a^2 \omega^3}{\frac{Eh}{a} + 2\rho_f c_f^2} \quad (\text{Eq. 1})$$

Cette formule est valable tant que l'onde de conduite est plus rapide qu'au moins une des deux ondes élastiques dans le sol. Si les ondes du sol sont plus rapides que l'onde couplée dans la conduite, il n'y a pas d'atténuation due au rayonnement dans le sol.

Notations: ρ_m masse volumique du sol, ρ_f masse volumique du fluide interne, h épaisseur, a rayon de la coque, ω pulsation, c_f vitesse du son dans le fluide, E module d'Young de la coque, $\varepsilon = 1$ ou $1/2$ selon que les deux ondes du solide sont plus lentes que l'onde α , ou seulement l'onde transverse. Ce dernier point est à vérifier *a posteriori*, car seule une résolution couplée permettrait de le prévoir *a priori*.

Le modèle a été comparé à des sources bibliographiques diverses, expérimentales et théoriques. Il se démarque fortement de l'article [8], par une approximation opposée des fonctions de Hankel modélisant le rayonnement. Il est très voisin en revanche de [5]. Son apport est la constitution d'un module informatique opérationnel. Son exploitation sur une

variété de cas confirme l'extrême dispersion des situations possibles, selon les caractéristiques de la conduite, les vitesses des ondes longitudinales et transversales, la masse volumique du sol et la fréquence. Le coefficient d'atténuation peut varier d'un facteur 1000 ! En pratique, la conclusion est de montrer la très grande influence de la nature du sol. On explique aussi ainsi une constatation faite sur le terrain: les conduites de gaz présentent beaucoup moins d'atténuation que les conduites de liquide. La raison en est que les conduites de gaz sont plus épaisses, du fait de la pression statique plus élevée - le couplage au sol est donc plus faible -, et aussi que la célérité dans le gaz est généralement plus faible que les célérités dans le sol, ce qui n'est généralement pas le cas du fluide. Voir Figure 2 - Figure 3.

Exemple de résultats: variation de l'atténuation en dB/m avec la masse volumique du fluide:

c_d et c_r sont les deux célérités du sol

$$\rho_m = 2000 \text{ kg/m}^3$$

$$c_d = 1400 \text{ m/s}$$

$$c_r = 800 \text{ m/s}$$

$$a = 0.32 \text{ m}$$

$$h = 0.001 \text{ m}$$

$$E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$c_f = 1500 \text{ m/s ou } 340 \text{ m/s}$$

$$f = 40 \text{ Hz}$$

La masse volumique croissante, les autres paramètres étant fixés, ralentit l'onde, et rend la conduite subsonique successivement pour les deux types d'onde. Pour $\log_{10} \rho_f > 2.55$, l'atténuation est nulle par propagation subsonique par rapport au milieu. Voir Figure 2 gauche.

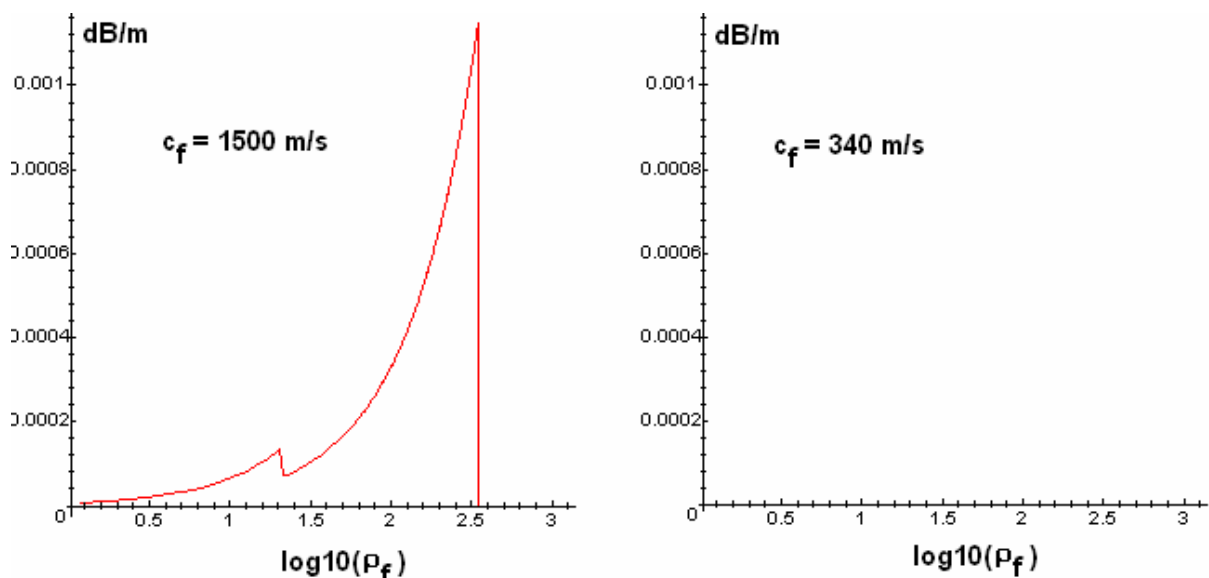


Figure 2 : Atténuation en fonction de la masse volumique du fluide, pour une vitesse du son dans le fluide de 1500 m/s à gauche, 340 m/s (à droite). A droite on voit une atténuation nulle.

Il en va de même, avec $c_f = 340$ m/s, pour toute valeur de ρ_f . de l'atténuation est nulle par propagation subsonique par rapport au milieu extérieur.

Exemple de résultat: Variation de l'atténuation en dB/m avec l'épaisseur (Figure 3)

$\rho_m = 2000 \text{ kg/m}^3$
 $c_d = 300 \text{ m/s}$
 $c_r = 200 \text{ m/s}$
 $a = 0.32 \text{ m}$
 $E = 2. 10^{11} \text{ Pa}$
 $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$
 $c_f = 1500 \text{ m/s}$
 $\rho_f = 1000 \text{ kg/m}^3$
 $f = 40 \text{ Hz}$

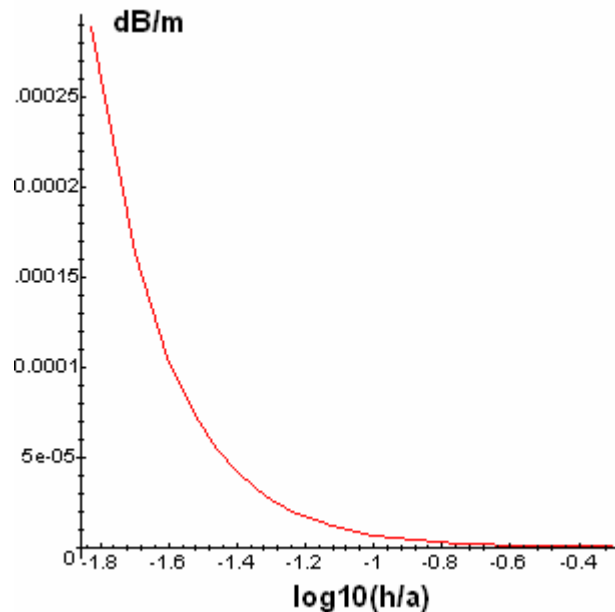


Figure 3: Atténuation en fonction de l'épaisseur de la conduite. Abscisse : logarithme décimal du rapport épaisseur / rayon

Bien que simple et assez grossier, ce modèle apparaît phénoménologiquement riche. Il fournit une aide à la conception des systèmes de surveillance acoustique des pipelines. Les approximations faites reposent sur la petitesse du diamètre devant les longueurs d'onde acoustique et vibratoire, sur l'assimilation de l'effet du sol, en mode de compression comme en mode transverse, à celui d'un milieu fluide infini de même célérité, et sur la prédominance relative de l'impédance de structure devant l'impédance de milieu externe. Vu l'incertitude sur les données concernant le sol, les approximations faites, même lourdes, sont de peu d'importance.

ii. *Ondes guidées en guide ouvert, ou comment obtenir des modes sans frontières*

POINT SENSIBLE N°2: BIEN QUE TRES OUVERTE SUR L'EXTERIEUR, LA CHAÎNE D'ISOLATEURS PRESENTE DES RESONANCES TRES MARQUEES A L'INSTAR D'UN TUBE.

A la fin des années 1970, EdF et une compagnie danoise d'électricité furent saisis de plaintes de riverains de lignes à haute tension. Chaque fois les plaignants expliquaient que leurs nuits étaient troublées par une sorte de hululement s'échappant de certains pylônes exposés au vent. Les coupables furent identifiés comme étant les longues chaînes d'isolateurs en verre qui soutiennent les câbles conducteurs: Figure 4.

Les isolateurs concernés ont schématiquement la forme de disques ou de soucoupes nervurées: Figure 5. La première nervure intérieure joue un grand rôle dans l'émission sonore.



Figure 4: Chaîne d'isolateurs en situation de contournement électrique en laboratoire.

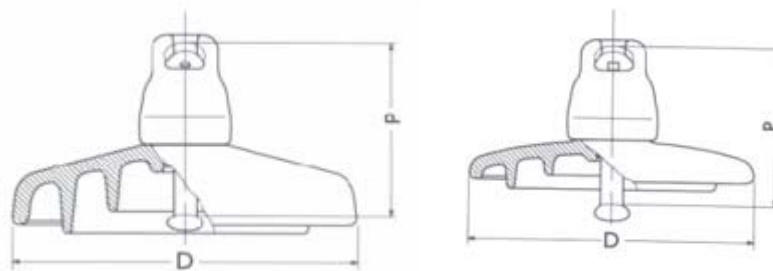


Figure 5: Exemples d'isolateurs

Sous certaines conditions de vent, ces chaînes émettent un son pur (une fréquence déterminée). Saisi du problème, certains spécialistes mirent en doute l'existence même du phénomène. Qui dit son pur pense résonance. Mais il est en effet peu courant de voir résonner un système entièrement ouvert comme la chaîne d'isolateurs. Une analyse expérimentale devait pourtant montrer que la chaîne se comporte comme un résonateur

acoustique de facteur de qualité élevé. L'excitation est une instabilité de l'écoulement se développant, côté amont, sur le bord extérieur et la première nervure intérieure [9, 10]. Il y a deux niveaux de rétroaction instable: le niveau local de la cavité entre bord et nervure, où se développe une instabilité de l'écoulement affleurant (Figure 6), et le niveau global, où la résonance acoustique d'ensemble réagit sur le détachement oscillant de cet écoulement affleurant. On retrouve là les mécanismes physiques de bien des instruments à vent.

La résonance acoustique est parfaitement identifiable déjà par des mesures sans écoulement. Les valeurs élevées de pression acoustique se rencontrent dans les espaces entre isolateurs (Figure 7). L'ensemble rayonne par ses extrémités. La surtension de la résonance est d'autant plus élevée que la chaîne est longue. Tout se passe comme si la chaîne se comportait comme un guide d'onde. Toutefois le statut de cette onde guidée est problématique. Doit-on la voir comme une onde rampante, cousine des ondes des guides à fente de l'électromagnétisme, comme un assemblage de résonateurs de Helmholtz constitués chacun par l'espace entre deux isolateurs, et couplés par voisinage, ou comme une onde de milieu périodique conforme à la théorie de Brillouin ? La réponse n'est pas tranchée, ces différentes descriptions pouvant chacune posséder une part de pertinence. La constance de la fréquence quelle que soit la longueur de l'assemblage montre que c'est la dimension de la cellule de base qui fixe la fréquence. En d'autres termes, la chaîne d'isolateurs n'a qu'un seul mode propre acoustique, et à une fréquence qui ne dépend pratiquement pas de sa longueur ! Naturellement, ceci n'est vrai qu'aux fréquences assez basses pour interdire l'apparition de modes présentant des surfaces nodales dans chaque cavité (Figure 7).

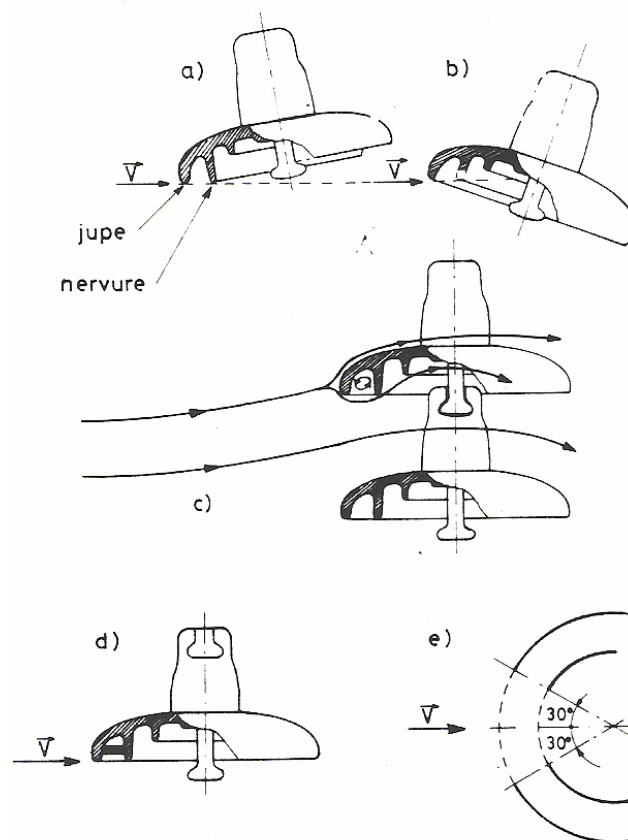


Figure 6: L'émission sonore se produit lorsque la zone amont est soumise à une couche limite tangente à la jupe et à la première nervure.

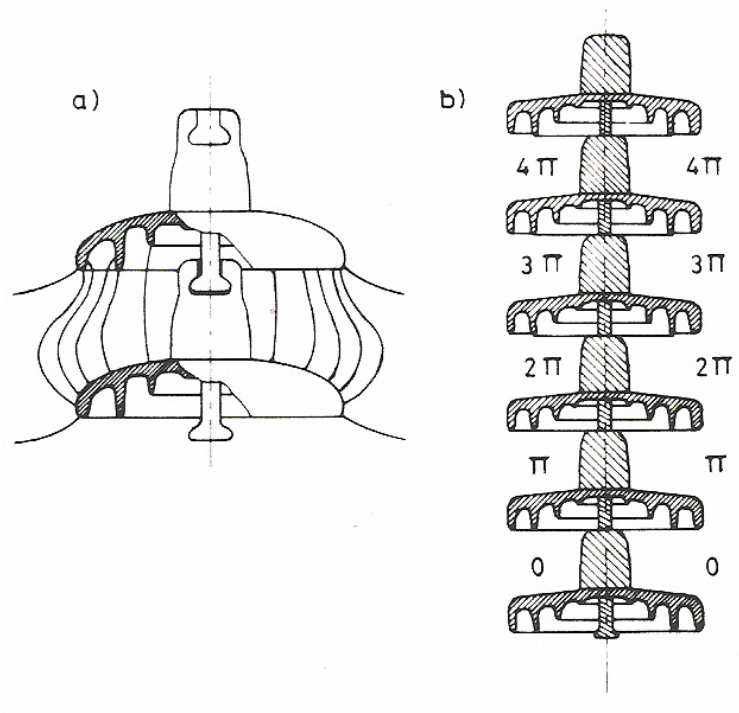


Figure 7: a/ lignes d'égal niveau de pression; b/phase de la pression dans les espaces entre isolateurs.

Il est clair que la théorie modale classique est inapte à décrire ce genre de résonance en milieu infini. En revanche une modélisation est possible avec une formulation intégrale de surface ('boundary elements'). A l'époque de ces travaux, les moyens disponibles n'autorisaient pas ce type de modélisation. Il est remarquable de constater que les logiciels développés par l'auteur (§ 2.4.iii) la permettraient maintenant. Ils offrent même le choix entre différentes représentations:

- formulation dérivée (hypersingulière, voir § 5 et § 6.1), si l'on peut attribuer une épaisseur nulle à l'isolateur. Ceci en temporel [11].
- formulation couplant intérieur (espace entre isolateurs) et espace extérieur à la chaîne, selon l'approche 'Bemhole' [12].
- formulation classique pour des corps occupant un volume, en temporel (code 'Astryd') ou en fréquentiel (code 'Bemhole').

iii. *Ondes de milieu périodique*

POINT SENSIBLE N°3: DECRIRE LA COMPLEXITE DE LA DYNAMIQUE DES COQUES DE SOUS-MARIN JUSQU'A NOMBRE DE HELMHOLTZ ELEVE: UNE TACHE RELATIVEMENT FACILE LORSQU'ON EXPLOITE LA PERIODICITE AVEC UNE ADAPTATION DE LA TECHNIQUE DES MATRICES DE TRANSFERT.

La question de la discrétion acoustique des sous-marins a amené les marines des différentes puissances à conduire des études sur le rayonnement des coques cylindriques immergées. Le challenge de modélisation était difficile, puisque le nombre de Helmholtz du problème (produit du nombre d'onde acoustique par la taille de l'objet, indicateur de la complexité du problème numérique associé) est élevé. A 500 Hz, ce nombre vaut environ 100 pour le sous-marin entier. A 5000 Hz, il est donc de 1000. Dans ces conditions, une modélisation complète par éléments finis (de volume ou de frontière) paraît difficile. Elle le paraissait bien plus encore lorsque ces études ont débuté. C'est pourquoi l'idée de développer un modèle analytique basé sur la géométrie du cylindre infini a paru très attractive. Cependant elle butait sur la présence des raidisseurs circonférentiels, qui jouent un rôle structural très important. Ils interdisent l'adoption du modèle analytique de la coque lisse (Figure 8).

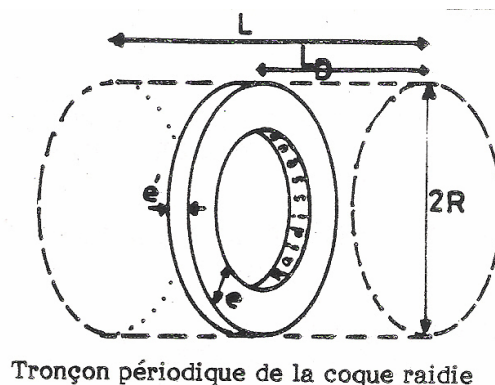


Figure 8: Schéma de la coque avec raidisseur simplifié (pas de semelle).

La solution du dilemme 'analytique = coque homogène / numérique = coque avec raidisseurs' est venue avec la technique des matrices de transfert.

Elle est ici fortement étendue par rapport à ce qui se fait classiquement, en statique des treillis par exemple: à chaque fréquence, et pour chaque ordre de Fourier circonférentiel, on exprime la matrice de transfert du tronçon élémentaire de coque lisse (entre deux raidisseurs); elle résulte de l'intégration analytique d'un système différentiel à coefficients constants; si la coque est immergée, le fluide extérieur est pris en compte comme une tranche discrétisée radialement jusqu'à une certaine distance de la coque [13, 14], voir Figure 9; on exprime aussi la matrice de transfert du raidisseur, à partir en fait des transferts de l'âme (plaque annulaire) et de la semelle éventuelle (à nouveau coque cylindrique lisse) [15, 16].

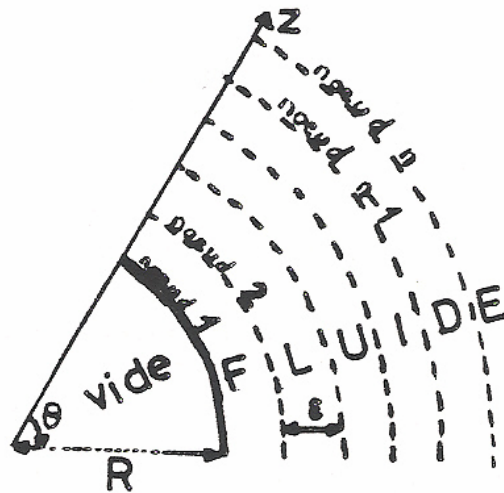


Figure 9: Schéma de discrétisation du fluide.

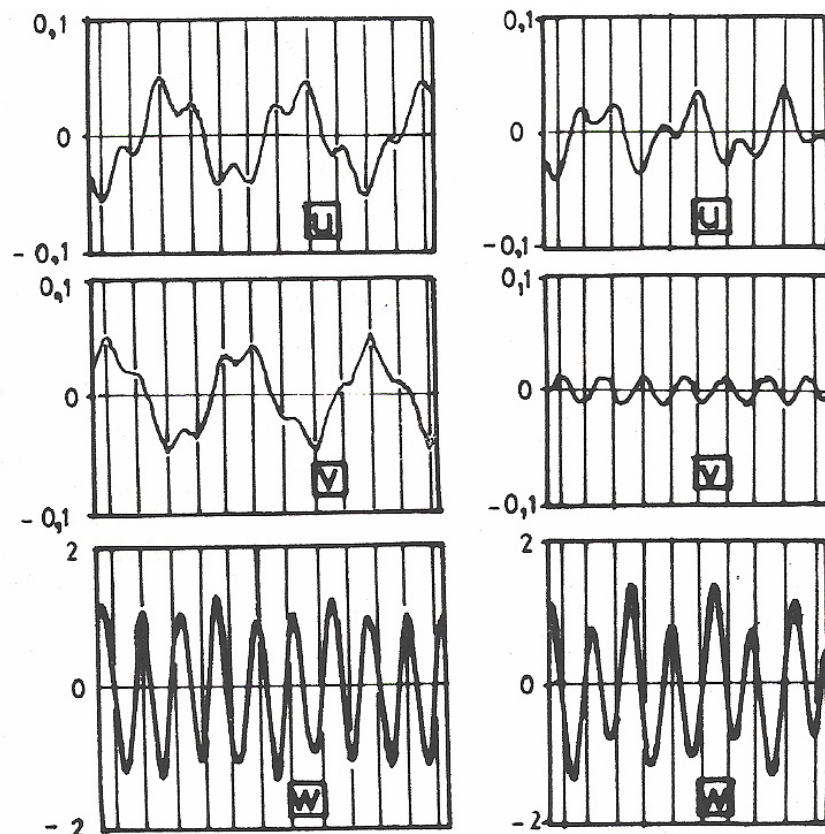


Figure 10: Vue instantanée du champ vibratoire associé à un vecteur propre (une onde naturelle de flexion prédominante). En abscisse la coordonnée axiale. Sont tracées les composantes u (axiale), v (tangentielle) et w (radiale) du déplacement de la coque. La grille verticale indique la position des raidisseurs.

$$\text{Ordre circonférentiel} = 2, f = 3000 \text{ Hz} = 2.3 f_a$$

Colonne de gauche: coque immergée, vitesse de phase 465 m/s. Colonne de droite: coque *in vacuo*, vitesse de phase 519 m/s.

L'assemblage de ces matrices de transfert s'opère par simple produit matriciel. On trouve les ondes naturelles se propageant dans le système périodique infini comme vecteurs propres de la matrice de transfert résultante (Figure 10).

Si le fluide est présent, ce sont les ondes du système couplé fluide-structure qui sont ainsi obtenues. Il est possible d'avoir la réponse à une excitation localisée en combinant les ondes trouvées (les quelques modes trouvés aux différents ordres circonférentiels) de manière à satisfaire à la condition d'excitation et aux conditions aux limites [17].

Les ondes trouvées comme vecteurs propres sont en nombre égal à la dimension de la matrice de transfert. Du fait de la symétrie gauche/droite, il convient de diviser ce nombre par deux, pour avoir le nombre de types d'onde différents. On aboutit *in vacuo* à 4 modes.

D'un point de vue physique, ce qu'on observe est conforme à la théorie des ondes de milieux périodiques: selon la fréquence, chaque mode (flexionnel, axial, torsionnel, mixte...) peut être propagatif, ou évanescents, dans la direction longitudinale. D'où la notion de bande fréquentielle permise ou interdite. Dans le lot de 4 ondes trouvées à chaque fréquence *in vacuo*, certaines, au minimum une, parfois deux, sont des ondes évanescents dans la direction longitudinale. Comme dans une plaque ou une poutre en flexion, elles permettent la construction du champ proche de l'excitation (effet de "poinçonnement") et des frontières (effet de "couche limite de bord"). Lorsque le fluide est présent, la taille de la matrice de transfert est considérablement augmentée puisqu'on l'augmente de $2n$ si n est le nombre de nœuds fluides (Figure 9). Parmi les nouveaux modes, la plupart sont des parasites aisément éliminés car dépendant de la discrétisation. Dans certaines conditions apparaît un mode supplémentaire interprétable comme une onde acoustique rampante le long de la coque. Il n'est pas sans rappeler le mode acoustique de la chaîne d'isolateurs périodiques (ii).

En Figure 11 on montre pour l'ordre circonférentiel 1 les courbes de dispersion des ondes généralement propagatives; l'onde évanescence n'est pas représentée.

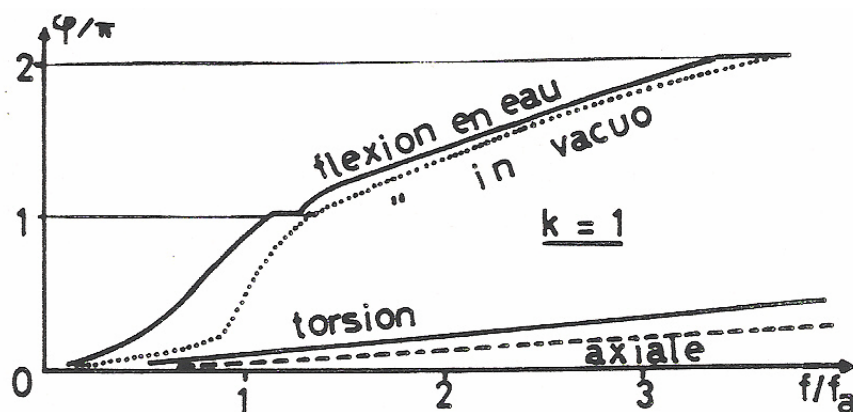


Figure 11: Déphasage entre deux raidisseurs, ordre circonférentiel 1. En abscisse: fréquence adimensionnée par la fréquence d'anneau.

Les ondes de 'torsion' et 'axiales' sont peu perturbées lorsque l'on immerge la coque. Il n'en va pas de même pour la flexion.

On distingue clairement:

- l'effet de la charge fluide sur la flexion, qui s'en trouve ralentie
- une bande fréquentielle à phase constante, dite 'interdite' ou 'd'arrêt' dans la terminologie de la physique du solide, située au voisinage de la fréquence d'anneau

$f_a = \frac{c_L}{2\pi R}$. La solution trouvée dans cette bande s'avère être une onde évanescence.

Logiquement, elle doit être rayonnante dans le fluide, par non-compensation des mouvements latéraux du fluide entre cellules voisines.

Dans notre revue des ondes, on trouve ici un nouveau type de phénomène ondulatoire plus complexe que les précédents. Dans ce système mécanique à plusieurs composants couplés, la propagation guidée montre de multiples facettes. La théorie, confirmée par les mesures (cf [13]), prévoit plusieurs types d'onde non évidents a priori. Le champ vibratoire associé à un mode propagatif particulier est en fait – sauf cas particulier de probabilité nulle - spatialement non périodique. On le voit en Figure 10, où la longueur d'onde vibratoire n'apparaît clairement que sur la composante radiale, prépondérante en flexion. En réalité cette propriété est classique, on la trouve déjà dans les assemblages infinis de masses et ressorts. Elle est inéluctable dans la mesure où le déphasage entre raidisseurs ou entre cellules élémentaires va croissant de manière continue. Ce déphasage, exprimé en nombre de cycles, a donc en général une valeur réelle non rationnelle donnant lieu au champ vibratoire apériodique. Mais ici elle est plus spectaculaire. A chaque instant de la période, tous les panneaux de coque et tous les raidisseurs sont dans des états de déformation différents. Les mouvements tangentiels associés à ce mode de flexion sont non négligeables. Ce couplage des d.d.l. est dû à la courbure et à la présence des raidisseurs; en effet, les deux couplent mouvements radiaux et tangentiels. De ce fait les modes propagatifs ne sont pas purs; les ondes de flexion ne sont que de flexion prépondérante, les autres déformations étant présentes. La distinction entre modes propagatifs et évanescents, typique du milieu périodique, doit être nuancée, car l'intervention du fluide extérieur modifie légèrement le tableau: les ondes propagatives de structure sont susceptibles de rayonner. La perte d'énergie par voie acoustique leur apporte alors une atténuation.

La validation du modèle aurait pu se faire en basse fréquence par rapport au modèle de coque homogénéisée analytique fournissant les modes couplés fluide-structure, obtenus comme pôles de Regge du système cylindrique, selon des principes exposés en [18] dans un cas électromagnétique. Cela n'a pas été fait, la validation expérimentale ayant paru suffisante.

iv. *Ondes en milieu hétérogène: rayons chaotiques*

POINT SENSIBLE N°4: LA CONTROVERSE SUR LE POSSIBLE CHAOS DES RAYONS NE CONCERNE ESSENTIELLEMENT QUE L'ACOUSTIQUE SOUS-MARINE.

Bien que régi par une équation déterministe simple et linéaire, l'équation d'Helmholtz, le monde des ondes acoustiques recèle aussi sa part d'indétermination. C'est ce

qu'on observe avec les rayons en milieu hétérogène. Les rayons sont une représentation des trajectoires suivies par l'énergie acoustique à la limite haute fréquence, lorsque la longueur d'onde devient très petite devant l'échelle des hétérogénéités du milieu [19]. On en obtient une formulation mathématique à partir de l'équation d'Helmholtz posée dans un milieu à vitesse du son variable avec la position et/ ou à mouvement convectif non uniforme. Elle consiste en un système différentiel régissant la trajectoire des rayons. Ce système est non linéaire. Dans le cas bidimensionnel avec l'hypothèse de rayons quasi-horizontaux, sa forme est donnée en [20]:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dx} = p + v/c \\ \frac{dp}{dx} = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial c}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} + p \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (\text{Eq. 2})$$

x et z sont les coordonnées dans le plan vertical, $c(x,z)$ exprime la relation entre vitesse du son et position, $u(x,z)$ et $v(x,z)$ sont les composantes de la vitesse de l'écoulement fluide. c , u et v sont toutes des fonctions données. La non-linéarité vient par la dépendance en z de la vitesse du son c et des gradients verticaux de cette même vitesse du son et des composantes de la vitesse du fluide.

Le comportement chaotique apparaît sur les simulations numériques; il se traduit par l'hypersensibilité aux conditions initiales (position, direction) des rayons; en d'autres termes, les trajectoires des rayons sont instables. Voir Figure 12 et Figure 13.

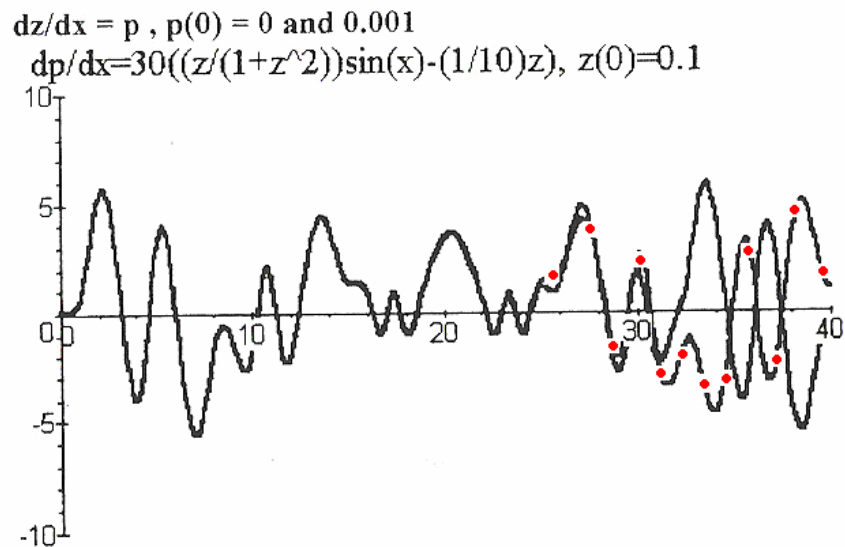


Figure 12 : Rayons chaotiques dans des conditions variables en z et périodiques en x . Figure tirée de [20].
Les deux rayons sont confondus jusqu'à l'abscisse $x = 26$. Au-delà, l'un des rayons est marqué par des points rouges. L'expression impaire en z du second membre simule une réflexion à la surface.

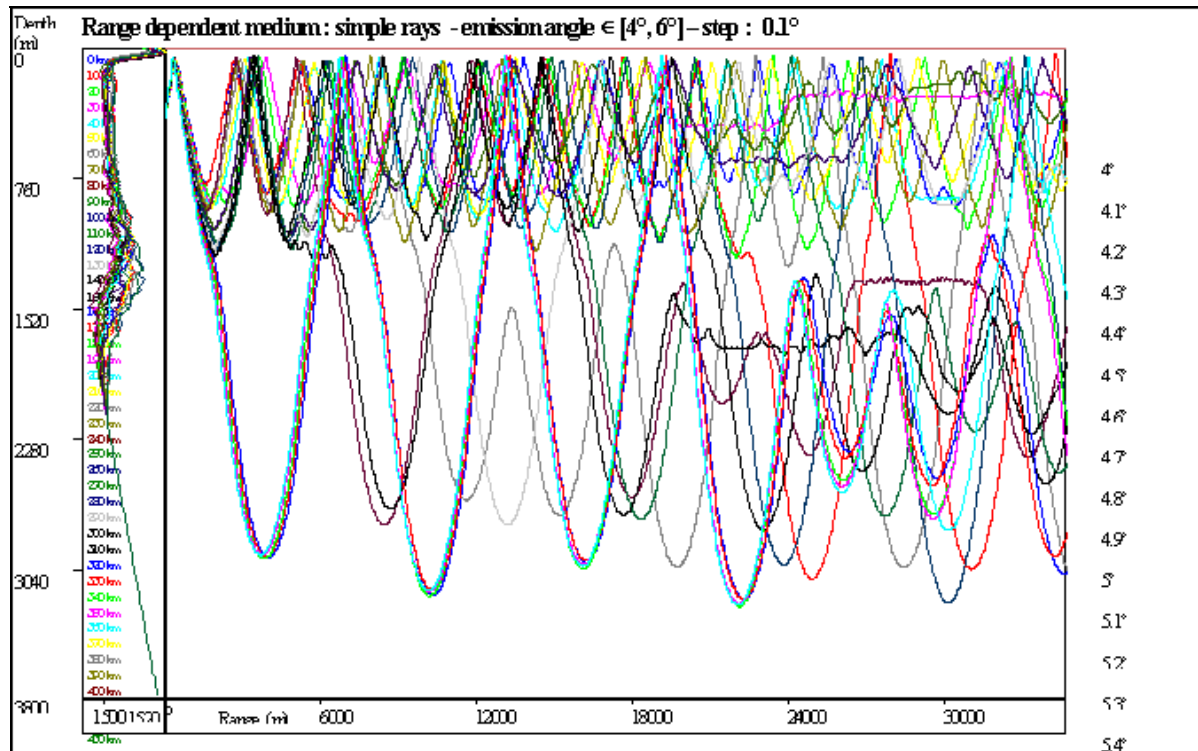


Figure 13 : Illustration of the chaotic propagation in the North East Atlantic. Extrait de [27]

Pour observer effectivement le chaos dans les équations, le milieu doit être à la fois hétérogène en x et en z , et suffisamment stratifié, c'est-à-dire présenter une échelle spatiale caractéristique beaucoup plus petite en z qu'en x . Ce fait était connu déjà à l'époque de la communication [20], comme en attestent ses références [21, 22, 23]. L'apport de ce travail a été de montrer par une adimensionnalisation du problème (Eq. 2) que les situations dans l'atmosphère et dans l'océan sont qualitativement assez différentes. Le seul paramètre adimensionnel influent, in fine, est en effet le groupement

$$S = \varepsilon \left(\frac{L_x}{L_z} \right)^2$$

où ε est le taux maximum de perturbation de la célérité des ondes se propageant dans la direction horizontale, et où L_x et L_z sont les échelles horizontale et verticale du problème physique, imposées par les champs de vitesse et de c donnés. Par simulation, on a alors montré que les valeurs réalistes de S dans l'atmosphère n'engendrent pas de chaos des rayons.

En d'autres termes, il apparaît en croisant des informations d'origine expérimentale et des simulations très simples, que l'atmosphère, moins stratifiée que l'océan, est beaucoup moins susceptible de présenter des rayons chaotiques. La conclusion de la communication [20] est que l'on peut continuer à tracer des rayons déterministes dans l'atmosphère, contrairement à l'océan, où il conviendrait de prendre en compte l'éventualité de rayons instables. Ce dernier aspect était déjà l'objet de débats. En fait il semble interdire toute tentative de tomographie du milieu: l'énergie se conservant dans un tube de rayons, et les

tubes de rayons 'éclatant' très rapidement au cours de leur propagation, un récepteur observerait des rayons venant de la source par une infinité de trajets.

Même si l'objet de [20] n'était pas de discuter de la possibilité d'une propagation chaotique, mais au contraire de montrer que dans l'atmosphère la question ne se pose pas, il peut être instructif de revenir sur ce débat.

Il est clair que le système (Eq. 2) est susceptible de présenter des trajectoires chaotiques dès lors que les variations de célérités et vitesse du fluide possèdent certaines caractéristiques. Il y a consensus sur l'existence de solutions chaotiques de cette équation. En témoignent l'article [24], et l'article [25] dans son introduction. Les simulations numériques du type des Figure 12 et Figure 13 ne sont certes qu'une illustration qualitative, les perturbations numériques jouant un rôle dans le résultat. Mais la démonstration théorique de la possibilité du chaos est clairement affirmée par analogie avec les systèmes Hamiltoniens non-intégrables en mécanique classique [24].

En revanche la validité physique de ce développement est questionnable. Le système (Eq. 2) résulte d'un passage à la limite haute fréquence dans l'équation d'Helmholtz, qui est, elle, linéaire. Une première critique est de faire remarquer qu'une instabilité de la solution par rapport aux conditions aux limites (position et directivité de la source) est incompatible avec la linéarité d'Helmholtz. Le point de départ linéaire (Helmholtz) interdit-il une acoustique chaotique ? Ce point semble encore faire débat.

Tappert [25] en 2003 apporte une réponse négative en se basant sur un modèle de faisceau gaussien d'inspiration parabolique, qui montre une divergence exponentielle à fréquence finie. Il propose des expériences de vérification, mais même la vérification numérique de sa construction théorique est encore à faire. Collins et Lingeitch [26] en 1999 apportent des arguments contraires, toujours sur une base théorique: pour eux, le modèle de rayons est non pertinent car dans le cas de rayons chaotiques précisément, l'approximation "rayons" basée sur un développement en ω^{-1} est en défaut, le terme de second ordre (négligé) devenant prépondérant. Les travaux très complets décrits en 1999 par Noël *et al.* [27] montrent sur un cas réel mesuré et simulé la difficulté de l'application de la technique des exposants de Lyapunov comme critère expérimental de chaos. En situation réelle, le chaos tend à être noyé dans les fluctuations aléatoires du milieu, les effets de diffraction à fréquence finie, des instabilités locales non spécifiquement chaotiques, *etc...* Tout en recueillant des indices très forts d'instabilité des rayons, ces auteurs ont une difficulté pour conclure sur l'importance et l'étendue des phénomènes chaotiques.

On voit donc qu'un consensus n'est pas facile à trouver. La difficulté de faire une expérience discriminante n'est sans doute pas étrangère à cette situation. Elle s'était révélée dès le traitement des données 'Gastom' [27]. La présence dans la réalité de perturbations aléatoires non maîtrisées, et la disponibilité de modèles numériques paraboliques plus ou moins indemnes de ces problèmes donne au débat un tour finalement assez académique.

v. *Ondes interfaciales et non linéaires, un écoulement à grande échelle*

POINT SENSIBLE N°5: EDF L'ETUDIA POUR LES REJETS DE SES CENTRALES, LES GEOPHYSICIENS EN FONT UN POINT SENSIBLE DES CHANGEMENTS PLANETAIRES: LA DYNAMIQUE INTERFACIALE PILOTE LES ECHANGES ENTRE MASSES D'EAU D'ORIGINES DIFFERENTES.

On ne peut achever cette visite au pays des ondes sans aborder la question de la non-linéarité. Il est question cette fois de la non-linéarité de l'onde elle-même, non de la trajectoire des rayons. Il se trouve que c'est dans ma thèse [28] que j'ai rencontré cette thématique pour la première fois. Les écoulements à surface libre (en fait ici à interface libre) soumis à l'effet de la gravité sont en effet, comme les écoulements compressibles, le lieu de fortes non-linéarités, qui se manifestent sous la forme de fronts, solitons, déferlements...

Ces écoulements internes (à la masse d'eau) étaient, dans les années 1970, schématisés comme des écoulements à deux couches séparées par une interface d'épaisseur nulle. Les performances des machines de l'époque ne permettaient pas mieux. Aujourd'hui, on utilise classiquement des représentations 3D avec plusieurs dizaines de niveaux verticaux.

Il paraît vain et peu pertinent de chercher à décrire l'apport de la thèse [28], tant ce domaine scientifique a progressé depuis, grâce au développement extraordinaire des moyens d'observation et des moyens de calcul. Il serait plus facile de pointer les insuffisances des travaux d'alors au regard des connaissances actuelles.

Mettons cependant en perspective une application du modèle alors développé. Le modèle d'écoulement interne à deux couches a été appliqué à une situation réelle mesurée qu'on pourrait qualifier de 'faite sur mesure': la thermocline dans le Loch Ness. Le Loch Ness présentait l'intérêt pour le modélisateur d'être long (40 km), rectiligne, étroit, de largeur et de profondeur à peu près constantes, et d'être stratifié en deux couches bien individualisées. Des mesures ont été rapportées [29]. Vu sa forme allongée, il possède (possédait ?) une période propre interne bien identifiée (premier mode), de l'ordre de 55 heures. Le vent exerce sur sa surface une contrainte qui est susceptible de mettre en mouvement l'ensemble de la masse d'eau. L'hypothèse développée en [29] est que si le spectre du vent – sur plusieurs jours - comporte la fréquence propre interne, l'interface va être excitée à la résonance, et la non-linéarité va provoquer le raidissement du front. A partir des données de [29], on a simulé une excitation par le vent du Loch. Avec une excitation sinusoïdale de période proche de la période interne, on génère une onde d'interface raidie par la non-linéarité. Cette onde est appelée ressaut interne. La comparaison aux mesures est assez satisfaisante: voir la Figure 14, extraite de [30].

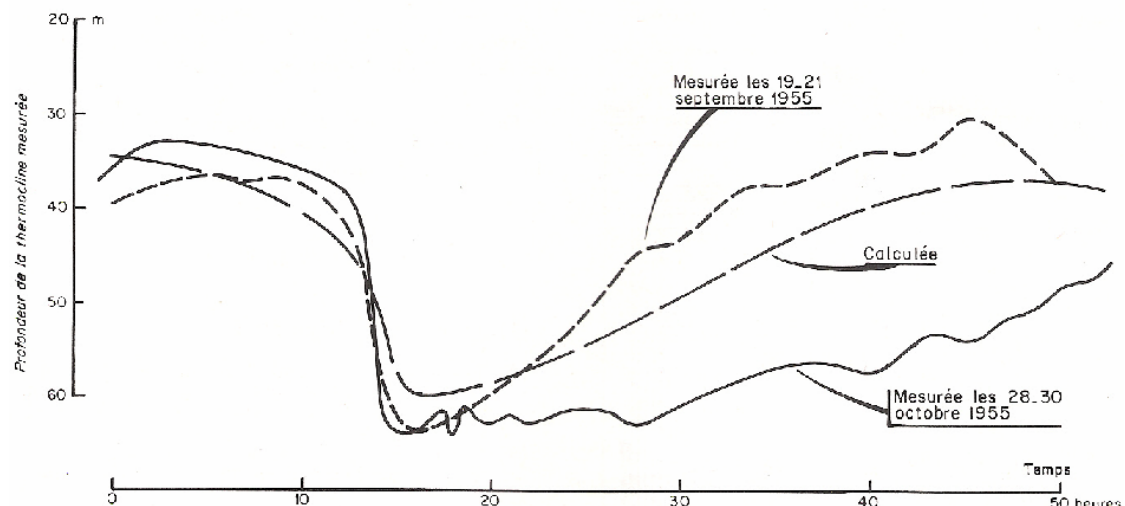


Figure 14: Mesures et calcul de la profondeur de l'interface sur le Loch Ness sous une excitation par le vent. Contrainte due au vent $\tau = 0.02(1 + \cos \frac{2\pi t}{T})$, $T = 52 \text{ h } 43 \text{ mn.}$

Période propre du bassin: 55 h 35 mn.

Critique de cette simulation: les données expérimentales sont assez pauvres. On ne dispose pas d'un historique précis du vent, le Loch Ness est réduit à un canal de section constante, la stratification et le vent sont supposés homogènes sur toute la longueur du plan d'eau. Pour considérer la comparaison comme pertinente, il faudrait pouvoir dire que l'évolution temporelle de l'interface observée et son amplitude, sont en fait indépendantes de l'histoire exacte de l'excitation. Ce serait le cas si du fait de la sensibilité du système et de sa non linéarité, toute excitation dépassant un certain niveau engendrait la forme observée. Sinon, on peut soupçonner le modèle d'un ajustement ad hoc des données visant à un bon accord. Ce point aurait dû être vérifié par un jeu de simulations avec une variété de conditions de vent couvrant toute une gamme de cas réaliste. Si l'on s'en tient à la publication [30], ce travail n'a pas été fait.

La mise en perspective avec des travaux récents est évidente lorsqu'on lit par exemple la présentation de sujets de thèses actuels à l'INPG:

'Déferlement de la marée interne et mélange' [31]

La marée de surface est bien connue parce qu'on peut la voir. Il y a une centaine d'années, on a découvert qu'existaient à l'intérieur des mers et des océans des « marées internes », c'est-à-dire des ondes se propageant au sein de la masse d'eau et d'amplitude verticale de déplacement beaucoup plus grande que la marée de surface (jusqu'à quelques dizaines de mètres, contre quelques mètres au plus pour cette dernière). Ces ondes sont appelées « marées » parce qu'elles ont la même période que la marée de surface qui les génère. Ce sujet de thèse concerne l'interaction de la marée de surface avec un talus continental. Lorsque la masse d'eau mise en mouvement par la marée arrive au voisinage du talus, le franchissement de celui-ci induit une vitesse verticale, qui génère des ondes -la

marée interne- au-dessus du talus. Ces ondes se propagent à l'intérieur de l'océan, peuvent déferler et, ce faisant, mélangent le fluide ambiant. L'énergie de ces ondes et le mélange qu'elles induisent sont d'une grande importance pour l'équilibre thermique global de l'océan. Une question cruciale est en effet de savoir si le mélange induit est suffisant pour permettre la remontée des eaux froides profondes vers la surface de l'océan... Ces ondes se propagent-elles loin de leur zone de génération? Où déferlent-elles? Quel mélange de fluide résulte de leur déferlement? La modélisation numérique de l'océan repose usuellement sur l'approximation hydrostatique, qui est bien adaptée à la description des grandes échelles de la circulation générale. Mais cette approximation ne permet pas de décrire les ondes internes et les processus de mélange qu'elles induisent. L'objet du travail de thèse est de mener une étude tridimensionnelle non hydrostatique de la marée interne, à l'aide d'un code de calcul parallèle modélisant de façon précise l'interaction de la marée avec un talus continental...

'Etude numérique des interactions courant-topographie : application au gyre subpolaire, aux seuils de Gibraltar et des mers Nordiques' [32]:

Cette thèse a pour objet l'étude des écoulements océaniques denses et équilibrés en densité le long des reliefs topographiques (pentes, talus, seuils) et l'amélioration des paramétrisations utilisées dans les modèles de circulation générale. Cette étude sera réalisée à partir de simulations réalistes de la circulation du bassin Atlantique Nord - Méditerranée - Mers Nordiques. Ces effets topographiques locaux, mal représentés dans les modèles actuels, affectent pourtant largement le champ de densité et la circulation générale de ces bassins à grande échelle, et leurs interactions dynamiques aux échelles climatiques.

Les échanges de masses d'eaux entre l'océan Atlantique Nord, la mer Méditerranée et les mers nordiques (mer de Norvège et du Groenland) se produisent au-dessus de seuils topographiques, siège de processus de petite échelle. Ces processus contrôlent largement ces échanges et leur variabilité à l'échelle mensuelle à décennale. Les masses d'eaux étant très différentes de part et d'autre de ces seuils, il en résulte de forts gradients de densité et de fortes vitesses...

En résumé:

Les échanges entre bassins marins sont contrôlés par des phénomènes proches du ressaut interne dans le Loch Ness. Ils jouent donc un rôle décisif dans le fonctionnement du système océanique planétaire. L'implication de ces travaux dans la modélisation du système climatique est claire. Naturellement ce lien était totalement ignoré lors des travaux menant à la thèse [28].

5. Acoustique numérique : la course vers la haute fréquence

Dans ce chapitre, je reviens sur mon parcours en acoustique numérique, en le situant dans le contexte général de cette problématique; les travaux auxquels je me réfère sont ceux menés dans le cadre universitaire, notamment les deux thèses que j'ai co-encadrées [33, 34] avec le Professeur G. Gogu, mais aussi les travaux menés hors de ce cadre; l'article [11] en est une illustration actuelle. On se référera à l'article joint [12] et aussi à [35]. Ce qui concerne la FMM est détaillé dans la thèse d'Antoine Pellicier [34] et dans l'article en cours de soumission [36]. Il n'est pas question ici de paraphraser les thèses ou articles joints. Dans les lignes qui suivent, on va plutôt exposer les motivations de ces travaux, les options choisies et les principaux résultats obtenus.

5.1 Equations intégrales en acoustique

La formulation en équations intégrales de surface (ou éléments frontières, ou 'boundary elements') s'impose comme particulièrement adaptée lorsqu'on souhaite résoudre un problème aux limites en milieu infini. Dès lors qu'on dispose d'une fonction de Green satisfaisant aux conditions à l'infini, le problème en domaine infini est ramené à un problème sur une surface, généralement la surface du corps à modéliser. Par rapport aux techniques d'éléments finis de volume, on gagne alors une dimension d'espace, et on assure exactement la condition à l'infini. Evidemment ces gains majeurs ont des contreparties, que nous allons rencontrer dans la suite, mais globalement, le bilan est positif, et l'approche 'équations intégrales' est retenue aussi dans d'autres situations non acoustiques: diffraction et rayonnement en électromagnétisme, statique et dynamique du solide infini, aérodynamique, écoulements poreux dans le sol...

La première apparition de la technique des équations intégrales en acoustique remonte semble-t-il, à Chen, en 1963 [37]. On citera également Mitzner [38] en 1967. A l'origine, les calculs portaient sur des maillages très modestes, et n'avaient aucune prétention d'application industrielle réaliste. Progresser dans cette direction supposait qu'on résolve différentes difficultés inhérentes à cette approche, qui seront détaillées au paragraphe suivant:

- coût très rapidement croissant du calcul avec la taille des cas

- présence de solutions parasites
- difficultés de modélisation associées à des problèmes théoriques dans certaines géométries.

Ce sont ces obstacles que j'ai rencontrés au long de mon parcours en acoustique numérique. Ils ont été franchis en s'appuyant naturellement sur les acquis de la communauté scientifique, mais aussi parfois avec une certaine dose d'originalité.

Les principales étapes ont été les suivantes:

- 1978: démarrage d'une recherche pour la Marine Nationale sur le calcul du rayonnement des émetteurs et de la transparence des dômes sonar, par équations intégrales à fréquence fixe (2D en fluide lourd).
- 1979: démarrage d'une recherche avec le CEA/ Saclay sur le calcul des pressions diffractées sur un bâtiment soumis à une onde d'explosion, en régime temporel, par les potentiels retardés. Par la suite, le code issu de ces travaux a été repris sous le nom d'Astryd. Son développement, très poussé en vibroacoustique en fluide léger moyennement couplé, s'est poursuivi principalement sous l'égide du CNES. Des travaux récents sont décrits en [11]. D'autres sont en cours actuellement, en collaboration avec C. Thirard, de 01db-Metravib.
- 1998: l'INRS et le LaRAMA (maintenant LaMI) établissent une convention qui sera le cadre de deux thèses portant sur l'approche fréquentielle et les enveloppes avec ouverture. Les travaux de thèse, complétés par mes travaux personnels, trouveront leur application dans différentes versions du code Bemhole de l'INRS.

Pour comprendre ces développements sur une si longue durée, il faut savoir que le marché de l'acoustique numérique n'est qu'un petit marché, comparé à celui des éléments finis de structure. La demande n'étant pas du même ordre de grandeur, les financements pour nouveaux développements ne se font que difficilement. Certains points restent dans l'ombre. Des situations particulières demandent encore des développements, d'où l'existence de 'niches' où le modélisateur est encore attendu. Nombre des travaux auxquels j'ai pu être associé concernent de telles 'niches', qui échappent encore aux possibilités des quelques codes généralistes du domaine (Rayon3, Actran, Comet).

Cette relative lenteur de développement s'explique aussi si on remarque que sur des cas industriels (les transports notamment), la modélisation de toute la gamme de fréquence est encore loin d'être acquise, et que divers palliatifs existent.

Ces palliatifs, on les trouve auprès d'autres méthodes: matrices de transfert, rayons, SEA (Statistical Energy Analysis). Ces méthodes ne seront pas analysées ici. Matrices de transfert et rayons ont été évoquées aux § 4.2.iii et 4.2.iv. La méthode SEA convient à des fréquences beaucoup plus élevées que la limite haute d'utilisation des méthodes intégrales. Les matrices de transfert ne fonctionnent que sur des système globalement 1D ou des assemblages de tels systèmes. Les rayons rencontrent des limitations de toutes sortes, géométriques, fréquentielles. Ils constituent *a priori* une méthode haute fréquence, même si on rencontre des applications à des fréquences étonnamment basses.

L'avantage de la technique des équations intégrales est sa généralité. Tout objet pouvant être maillé doit pouvoir être calculé. Ce n'est pas le cas de la SEA, par exemple, car elle demande de faire appel à une bibliothèque de composants (et surtout de coefficients de transferts entre composants) qui ne pourra jamais être complète.

5.2 Les points critiques

Les énormes avantages de la formulation intégrale ont quelques contreparties, un prix à payer, on l'a dit au paragraphe précédent.

i. Coût très rapidement croissant du calcul avec la taille des cas

La cause en est la structure pleine des matrices à traiter: contrairement aux éléments finis, où seuls les éléments voisins s'influencent mutuellement, tous les éléments influent sur tous les éléments. Ceci découle de l'interaction des éléments par fonction de Green. C'est une conséquence de la réduction dimensionnelle.

Monter en fréquence dans les calculs en dynamique est une préoccupation constante malgré les performances des ordinateurs. Le problème est particulièrement critique en acoustique aérienne, où les longueurs d'onde de la gamme audible sont relativement courtes devant la taille des objets à modéliser. Sur une foule d'objets courants, tels que véhicules, machines,...on a pendant longtemps dû se cantonner à des situations 'basse fréquence'. C'est encore en grande partie le cas aujourd'hui.

Il est connu que le volume de calcul ('complexité' / terme peu adapté à mon avis personnel), pour un problème acoustique monofréquence en formulation intégrale, varie comme le carré du nombre d'éléments. En effet, il est impératif de mailler les surfaces plus finement que le quart de la longueur d'onde pour une contrainte évidente d'échantillonnage

spatial. Pour des corps de dimension caractéristique D , on obtient alors des matrices de taille

$$O\left(\frac{Df}{c}\right)^2.$$

Les matrices ainsi obtenues sont pleines (contrairement aux matrices 'éléments finis'). La résolution par élimination de Gauss étant exclue, car excessivement coûteuse, on se tourne vers des méthodes itératives du type 'gradient conjugué'. A chaque itération on a alors à faire un produit matrice-vecteur, opération dont le volume varie comme

$$O\left(\frac{Df}{c}\right)^4.$$

En supposant le nombre d'itérations fixe, la variation est bien en puissance quatre de la fréquence. Compte tenu de la multiplication des fréquences à traiter, on peut dire qu'un calcul industriel standard voit son coût croître comme la puissance 5 de la fréquence. Cela signifie que si la puissance de calcul des ordinateurs double tous les deux ans, il faut attendre 10 ans pour doubler la fréquence maximum des calculs. Il y a donc un réel besoin d'accélérer la méthode intégrale habituelle.

Notons que le tableau en régime temporel n'est pas fondamentalement différent. A chaque pas du calcul, on doit en chaque point de calcul du maillage obtenir l'effet de tous les éléments aux temps retardés (antérieurs). Ceci est une opération linéaire assimilable à une multiplication vecteur-vecteur (pour un point) ou matrice-vecteur (pour tous les points). D'où le coût en

$$O\left(\frac{Df}{c}\right)^4$$

à chaque pas de temps. Le nombre de pas de temps indispensable au calcul est donné par le temps de traversée du corps, les pas suivants pouvant être extrapolés. Il est donc de l'ordre de

$$O\left(\frac{D}{c\Delta t}\right).$$

Compte tenu de la relation de Courant-Friedrich-Léwy, qui doit être approximativement vérifiée, même si le calcul est implicite, on a:

$$\lambda \geq \Delta x/4 \approx c\Delta t/4$$

$$O(D/(c\Delta t)) \geq O(D/\lambda) = O(Df/c)$$

D'où encore une puissance 5 de la fréquence. Les derniers travaux en vue de réduire le coût du calcul temporel portent, en vibro-acoustique, sur une représentation centrée sur les modes de structure, offrant ainsi une réduction du nombre de d.d.l. à prendre en compte à chaque pas.

La FMM (Fast Multipole Method) apporte un vrai progrès dans la vitesse de calcul des ces produits matrice-vecteur. La FMM est une technique de résolution du grand système, construit avec les éléments frontières, qui réduit substantiellement les lois de croissance des volumes de calcul. Avec la FMM '1 niveau', la croissance en puissance 5 est remplacée par une croissance en puissance 4, et pratiquement en puissance 3 avec la FMM multi-niveau.

Quel est le principe de la FMM ? La technique FMM repose sur une représentation synthétique et légèrement approchée de l'effet de paquets lointains de sources. Elle a son origine dans les besoins de la modélisation de la dynamique gravitaire de larges populations stellaires (galaxies, etc...).

Elle utilise des approximations des effets à distance au sein du maillage: lorsque des éléments sont suffisamment lointains, leur contribution est approchée comme étant celle de paquets, sortes de super-éléments de frontière. Dans le calcul des influences lointaines on n'a plus à considérer que des paquets, en nombre fortement réduit. En contrepartie on a des calculs complémentaires à faire pour former le rayonnement des paquets et pour redescendre au niveau des points de réception. Heureusement ces calculs s'avèrent finalement peu coûteux.

Il subsiste toutefois une difficulté: si la longueur d'onde des vibrations est courte devant la longueur d'onde acoustique (en rayonnement de structure), ou si les détails de la géométrie sont petits devant cette même longueur d'onde, sans être négligeables, on doit 'surmailler'. On est alors conduit à des maillages lourds même en basse fréquence, alors qu'aucun élément n'est suffisamment lointain, en termes de longueur d'onde, pour appliquer la FMM standard. Des recherches actuelles sont menées sur ce thème [39, 40].

ii. *Présence de solutions parasites*

Elles sont connues sous le nom de 'fréquences irrégulières'. On retrouve là un effet nocif de la réduction de dimension. Considérons, par exemple en rayonnement, le problème 'extérieur' avec la formulation 'naïve' :

$$\frac{1}{2}p(P) = \int_{\Gamma} \left(p(Q) \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q} - j\omega\rho_0 V(Q) G(P,Q) \right) dS_Q \quad (\text{Eq. 3})$$

Le calcul porte sur la surface Γ . Il se trouve qu'à certaines fréquences, dites 'irrégulières', le problème sans second membre (ici, $V = 0$) a une solution qui se superpose à la solution du problème d'origine, avec second membre. D'où une pollution de la solution physique recherchée qui tend, après numérisation, à toucher aussi les fréquences voisines. La solution parasite est un mode propre du domaine intérieur pour un problème associé mathématiquement, mais sans signification physique. Cette difficulté est sans conséquence tant qu'on traite des problèmes en basse fréquence. Mais lorsqu'on monte en fréquence, on atteint une zone où les modes parasites deviennent denses, et donc très gênants. Pour s'affranchir de ce problème, trois grandes techniques ont été proposées:

Surdétermination (Schenk [41]):

Ajouter des conditions intérieures forçant la solution à y rester nulle, donc éliminant la solution parasite. D'après mon expérience personnelle, cette technique ne fonctionne pas de manière robuste sur des cas pratiquement intéressants.

Problème dérivé:

La formulation obtenue en dérivant la formulation (Eq. 3) par rapport à la normale à la surface du corps admet des solutions physiques à l'intérieur comme à l'extérieur. Ses modes intérieurs sont physiques, contrairement au problème posé par (Eq. 3). Dans de nombreux cas, vibro-acoustiques notamment [11], cette option est une bonne façon de traiter le problème. Cependant, elle demande de savoir traiter la partie finie de Hadamard, qui apparaît alors dans l'auto-influence de chaque élément. Cela, je l'ai fait par un calcul analytique direct dès le début des années 1990, sur le calcul temporel 'Astryd', alors que les premières publications confirmant la viabilité de cette technique semblent dater de la même période.

Résolution d'un problème augmenté (Burton et Miller [42], Ohayon et Soize [43]):

En combinant algébriquement le système avec le système dérivé (les deux problème ci-dessus), on obtient un nouveau système qui a perdu les modes irréguliers. C'est la seule technique qui fournit bien la solution du problème extérieur avec un champ intérieur nul à toute fréquence.

Un palliatif à fréquence peu élevée peut être de fournir un indicateur de fréquence irrégulière, signalant si le calcul est correct ou non. Un tel indicateur a été construit récemment [44], basé sur le rapport d'un champ intérieur 'moyen' à la solution extérieure de surface; en théorie, dans une résolution exacte, ce rapport est nul.

Sur le même thème des solutions parasites ou erronées, on doit mentionner les modes numériquement instables du calcul temporel. Il est connu depuis l'origine que les calculs explicites présentent des instabilités de type oscillant d'amplitude croissante. La mieux reconnue est l'oscillation haute fréquence sur deux pas de temps. Pour les éliminer, une structure implicite de l'algorithme est un élément favorable. Mais elle ne suffit pas pour éliminer automatiquement toute instabilité. On rencontre des instabilités basse fréquence, voire exponentielles non oscillantes [11]. Différentes recettes, de caractère plus ou moins empirique, ont été proposées pour régler ces problèmes. En [11], une technique basée sur les valeurs et vecteurs propres généralisées du problème temporel discrétisé agit directement sur certaines de ses matrices.

iii. Difficultés de modélisation associées à des problèmes théoriques dans certaines géométries.

POINT SENSIBLE N°6: SELON L'ÉPAISSEUR DE LA STRUCTURE RAYONNANTE, ON CHOISIRA LA TECHNIQUE DE SEYBERT OU CELLE DE L'HYPERSINGULARITÉ.

L'approche par équations intégrales de surface est sans problème dès lors qu'il s'agit de traiter un problème intérieur ou extérieur sur une forme assez simple, avec les précautions nécessaires relatives aux fréquences irrégulières dans le cas du problème

extérieur (voir paragraphe précédent). Dans le cas 'intérieur', la formule 'standard' (Eq.3) convient; dans le cas 'extérieur', on a le choix entre les options rappelées plus haut.

Pourtant certaines questions apparaissent dès que la géométrie n'est pas 'simple'. Les deux situations typiques sont celle des structures avec ouvertures 'd'épaisseur moyenne', et celle des structures minces fermées.

Avec les structures minces, c'est-à-dire du type coque en contact avec le fluide acoustique sur leurs deux faces, et d'épaisseur très inférieure à la longueur d'onde, la formulation dite 'dérivée' ou 'hypersingulière' paraît très attractive, puisqu'elle donne directement le résultat dans les deux domaines [11]. Elle est économe en calcul, puisqu'elle réduit la taille du système de moitié, le problème étant posé sur une seule surface et non deux. La question qui se pose est celle de l'hypersingularité, ou partie finie de Hadamard, qui sera discuté au § 6.1.

Avec les structures non fermées, on peut appliquer la technique hypersingulière si l'épaisseur est suffisamment faible. Mais si l'épaisseur est conséquente, en le faisant on introduirait alors des erreurs de géométrie trop élevées ([12, 35]). Le maillage du corps entier avec un intérieur de volume fini conduit lui à de gros problèmes numériques dès que la distance entre éléments peut devenir inférieure à la taille d'un élément, c'est-à-dire dès que l'épaisseur est inférieure à la taille d'un élément. Raffiner le maillage est rarement la solution, vu le coût de la résolution sur le nouveau maillage. Dans les cas d'épaisseur intermédiaire (structures 'd'épaisseur moyenne'), on est conduit à une troisième solution, qui consiste à coupler par l'ouverture intérieur et extérieur en formulation standard non dérivée. Cette méthode, dire méthode de Seybert, a été appliquée en fréquence fixe avec ou sans FMM (thèse [33], [35, 36]).

5.3 Etat actuel, bilan et perspectives

i. *Lignes conductrices*

Lorsqu'on essaie de recenser les lignes conductrices qui ont été suivies avec constance au cours de ces années, il apparaît quelques lignes de force:

Simplicité de conception et de programmation:

Avec une force de travail limitée, mieux vaut faire travailler l'ordinateur. La complexité du programme se paie souvent très cher en termes d'erreurs à détecter et à corriger. C'est pourquoi on a choisi au départ, pour s'y tenir par la suite:

- éléments triangles C^0 (constants par morceaux). Ce choix a au départ été motivé par un souci d'économie de développement dans un contexte relativement exploratoire et peu ambitieux; *a posteriori* il s'avère particulièrement adapté aux équations intégrales hypersingulières. En effet l'intégration analytique de l'autoinfluence de la partie finie est grandement simplifiée dans ce cas. De plus les tests montrent que la résolution itérative toujours adoptée converge mieux avec les éléments constants [45]. Même les programmes ultra-performants de l'équipe [39] utilisent cet élément 'rustique'. On peut y voir une illustration du principe selon lequel la simplicité est toujours payante.

- intégration analytique ou pratiquement analytique de l'auto-influence, quel que soit l'ordre de la singularité. Dans le cas de la partie finie de Hadamard, ce choix a été difficile à assumer, car difficile à décrire et expliquer de manière intuitive, et manquant de référence en acoustique.
- pas de formulation explicitement variationnelle. On s'écarte là des canons de l'orthodoxie en la matière, surtout en France. Cependant, soit la formulation est un simple vernis théorique sans effet sur les équations finalement programmées, soit elle joue son véritable rôle, et on est amené à un niveau d'intégration supplémentaire, qui nous écarte du parti pris de simplicité programmatique.

A noter tout de même que le programme de FMM dû à A. Pellicier compte près de 1000 lignes de commande Matlab, ce qui en fait un objet informatique d'une certaine ampleur.

Robustesse à l'emploi:

Le but est d'éviter de lancer un calcul sur des données erronées ou non pertinentes, ce qui fait perdre du temps au spécialiste et ce qui décourage l'utilisateur débutant; il suffit souvent pour cela de prévoir quelques tests assortis de messages de diagnostic. Par ailleurs les paramètres de réglage internes doivent pouvoir être choisis automatiquement, ce qui demande de traduire en programmation des règles pratiques parfois non écrites.

ii. Acquis scientifiques et opérationnels

Calcul fréquentiel

- mise au point d'une technique adaptée aux structures d'épaisseur moyenne avec ouverture, et valable aussi dans les autres cas d'épaisseur (méthode de Seybert) [35].
- démonstration de la persistance du problème des fréquences irrégulières dans un calcul selon la méthode Seybert [46].
- démonstration de l'existence d'un défaut de précision pour le calcul de la fréquence du résonateur de Helmholtz avec la méthode Seybert [46, 44].
- démonstration de la possibilité d'avoir un indicateur de gravité du problème des fréquences irrégulières [47].
- implémentation d'un modèle de paroi absorbante rustique mais suffisant pour une évaluation correcte [12, 33]: impédance locale suivant la loi de Delany et Basley basée sur la résistivité et l'épaisseur de la couche de matériau.
- développement d'algorithmes de FMM optimisés, en un ou plusieurs niveaux. La technique 1 niveau est implémentée dans Bemhole, le code de l'INRS. Cette avancée est très importante, peu de logiciels de grande diffusion (voire aucun) offrant cette fonctionnalité. Les calculs facilement accessibles avec des PC standard ont vu augmenter leurs maillages d'un ordre de grandeur (de 1000 à 10000 éléments environ) [48].
- démonstration de la validité de calculs FMM avec des champs de vibration faiblement sous-critiques (de longueur d'onde inférieure à la longueur d'onde acoustique) [48].
- implémentation de la FMM de manière simplifiée dans l'algorithme de la méthode de Seybert (avec ouverture) [48].
- dans tous les cas une confrontation mesure-calcul a été effectuée [12, 33, 34, 35, 48]. La mesure de référence, car assez stable et la plus importante par ses conséquences pratiques, est la mesure de puissance rayonnée en fonction de la fréquence. Elle est obtenue en chambre semi-anéchoïque par intensimétrie à balayage selon la norme NF S31-025. La sonde intensimétrique, le plus souvent de pas 5 cm entre micros, est placée successivement aux différents nœuds d'un maillage couvrant les 5 faces planes d'un cube entourant la source. Le système d'acquisition est de traitement est fourni par la Société 01dB-Metravib. Le pas de sonde est réduit en haute fréquence. *Confer* [12], p. 503-504. L'excitation est réalisée par une force ponctuelle appliquée par un excitateur électrodynamique isolé acoustiquement par un encoffrement rempli de laine de verre et découplé mécaniquement. La force appliquée est un bruit large bande [20 – 2000 Hz] ou [20 – 6000

5. Acoustique numérique: la course vers la haute fréquence

Hz] selon les cas. La vibration de surface qui constitue l'entrée du calcul de rayonnement doit aussi être mesurée. Le champ de vibration est obtenu avec un balayage laser sur un maillage de la surface du corps (caisson ouvert ou cylindre selon les cas). Le pas du maillage est 0.08 m ou 0.03 m selon les cas. Il comporte jusqu'à 1800 points (cylindre). Dans ce dernier cas le cylindre est placé sur un support tournant facilitant le balayage. Pression de contrôle et vitesse de vibration sont acquises avec un système LMS. Tous les résultats dans le domaine de Fourier sont normalisés par la force délivrée à la même fréquence. Tous ces essais ont été menés avec les moyens matériels et humains de l'INRS. Le Tableau 3 résume les principales données de ces essais.

	Thèse Polonio [33]	Thèse Pellicier [34]
Taille du corps	0.5 x 0.4 x 0.3 m	0.9 x 0.6 m
Bande de fréquence de l'excitation	0-2000 Hz	0-6000 Hz
Maillage de mesure vibratoire	8 cm	3 cm
Parallélépipède de mesure de puissance	2 x 2 x 2 m	1.4 x 1.4 x 1.5
Pas de sonde d'intensimétrie	5 cm	Variable avec f, au plus 5 cm
Pas fréquentiel d'acquisition	Vibration: 1 Hz Intensité: 1,56 Hz	Vibration: 1 Hz Intensité: 1,56 Hz
Pas de maillage des mesures d'intensité	10 cm environ	10 cm environ

Tableau 3: Paramètres des mesures de rayonnement

Calcul temporel

- j'ai établi et mis en œuvre la technique de la partie finie de Hadamard [11].
- stabilisation des calculs Astryd vibro-acoustiques sur structures fermées en formulation hypersingulière par traitement algébrique des matrices du problème discrétisé en temps et espace [11].
- mise en évidence de l'intérêt du problème polynomial de valeurs et vecteurs propres associé aux matrices du problème discrétisé en temps et espace [11], noté brièvement

$$\sum_{n=0}^N \mu^n A^{(n)} \cdot \{\Phi\} = 0$$

Ce formalisme mathématique contient toute l'information sur les modes physiques et numériques (éventuellement instables).

iii. ***Orientations***

A la suite de ces travaux, il est souhaitable de poursuivre les avancées dans les voies qui paraissent les plus utiles. Pour les applications industrielles, il est important de bien traiter les ouvertures; la difficulté rencontrée avec le résonateur de Helmholtz dénote un problème plus général avec la modélisation des ouvertures. Il faut au moins définir des règles pratiques de choix des options de maillage et de technique de résolution;

éventuellement définir un élément spécifique de bord d'ouverture. L'option hypersingulière ne traite pas les ouvertures en cas d'épaisseur moyenne [12]; mais elle est attractive avec sa potentialité de surfaces minces en vibroacoustique. Reste à en accélérer la résolution. On en tire les voies d'action suivantes.

Calcul fréquentiel

- mettre en place la technique FMM avec la formulation intégrale dite dérivée (et la structure en éléments finis). Ceci demande une modification de la FMM au niveau des relations analytiques. D'un point de vue pratique pour l'ingénieur c'est une option dont les applications sont nombreuses: élimination des fréquences irrégulières, structures ouvertes.
- imprécision du calcul du résonateur de Helmholtz: on sait déjà que le maillage joue un rôle; des recherches doivent être entreprises pour déterminer la meilleure technique pour avoir un résultat fiable: formulation dérivée ou non, éléments spéciaux pour prendre en compte la forme particulière des champs de vitesse et de pression au bord de l'ouverture, maillage adaptatif de la zone de l'ouverture ? (selon quelle règle ?). On s'appuiera sur les travaux concernant les ouvertures [49, 50, 51]. Les ouvrages de Junger et Perulli, Pierce, ainsi que Léwy fournissent des références éprouvées.

Calcul temporel

- problème polynomial de valeurs et vecteurs propres [11]: il conviendrait de réunir le maximum de résultats mathématiques sur ce sujet, afin d'exploiter au mieux ce formalisme. Le but serait une avancée sur le problème récurrent des instabilités numériques en formulation temporelle. On ne chercherait pas une exploitation exhaustive de toute l'information; elle est obtenue dans les résolutions pas à pas. Mais on s'intéresserait à un sous-problème: stabiliser le système en modifiant les valeurs propres concernées tout en perturbant l'ensemble *a minima*. C'est un prolongement de la démarche développée pour l'instabilité des modes 'pneumatiques' des cavités fermées dans les travaux [11].
- poursuivre avec C. Thirard de 01dB – Metravib les idées de réduction de l'information gérée en vibro-acoustique. Cette fois la réduction s'obtient non pas par la FMM, mais par une représentation modale réduisant le nombre de degrés de liberté à traiter au cours de la progression temporelle. L'inconnue est le vecteur des participations modales en termes d'accélération. A une accélération $\delta(t)$ sur l'élément j correspond un saut de pression entre faces $u_{ij}(t)$ sur l'élément i . D'où $\Delta p_i = u_{ij}(t) * \gamma_j(t)$. Au final on réduit la taille du système à N_{mod} au lieu de N_{elem} .

6. Mathématique et modélisation : quelques exemples

Processus de l'invention:

*« Et tout à coup, ... je fais ce théorème mien. Il y faut un temps indéterminé : une fraction de seconde ou des dizaines d 'années ;Vite donc ou peu à peu, le théorème passe dans ma tête, mes yeux, ... je marche dans son espace, pose les mains et les pieds sur sa mesure, ...de sorte que je le reconstitue, le réinvente à partir de ses base ; cet objectif se change en subjectif. Je ne le sais plus, je le ressens, le vis, Alors, je puis généraliser ledit théorème, entrer dans la géométrie qu'il modélise...Mais, de nouveau, je revois ou répète des structures déjà produites par d'autres avant moi...Et la digestion, la gestation, l'incorporation recommencent....Jusqu'à ce que je hante ces structures comme une maison devenue mienne
...voici l'heure d'inventer».[1]*

6.1 Hypersingularité dans les équations intégrales de l'acoustique: un monstre à affronter ou à contourner ?

POINT SENSIBLE N°7: INTEGRER L'HYPERSINGULARITE EN PARTIE FINIE DE HADAMARD, OPERATION D'UNE GRANDE UTILITE PRATIQUE IMPLEMENTEE DANS LE CALCUL TEMPOREL, EST JUSTIFIE MATHEMATIQUEMENT ET PHYSIQUEMENT SIGNIFICATIF.

i. Les zones d'ombre de l'hypersingularité

Le code ASTRYD utilisé par le CNES a fait ses preuves ; il est basé sur une intégration 'directe' de l'hypersingularité (partie finie de Hadamard) apparaissant dans la formulation 'dérivée' en temporel (cf article joint [11]).

La partie finie de Hadamard dans le cas des équations temporelles vient d'un groupement de termes d'auto-influence sur l'élément numéro i:

$$\iint_{T_i} \left[\frac{\Delta \dot{p}^*}{cr^2} + \frac{\Delta p^*}{r^3} \right] ds$$

où Δp est la fonction inconnue, Δp^* sa valeur aux temps retardés, d la distance à l'origine (centre de l'élément i), ds l'élément de surface, T_i un élément triangle supposé plan, $b_i(\theta)$ la fonction décrivant le contour de l'élément en coordonnées polaires d'origine M_i . On se place dans le cadre des hypothèses "C⁰ en espace, C¹ en temps". Le terme en

$$\frac{1}{r^3}$$

est à l'origine de l'hypersingularité présente dans l'équation intégrale. Le résultat du calcul donne:

$$F.P. \iint_{\tau_i} \left[\frac{\Delta \dot{p}^*}{cr^2} + \frac{\Delta p^*}{r^3} \right] ds = -\frac{2\pi}{c} \Delta \dot{p}(M_i) - \oint_{\partial \tau_i} \frac{\Delta p^*}{b_i} d\theta \quad (\text{Eq. 4})$$

Cette expression est validée par l'usage qui en est fait avec succès et par sa présence en [67]. Mais on n'y trouve pas de démonstration de la formule. La recherche bibliographique apporte d'assez nombreuses références, mais elles sont peu prolixes sur les fondements de ce calcul et sur sa signification physique.

Le sujet est complexe, et a donné lieu à de multiples travaux. Les applications en mécanique concernent l'acoustique et l'élastodynamique, en régime fréquentiel comme en temporel, mais aussi l'hydrodynamique et l'élastostatique. Après les travaux pionniers de Filippi [52, 53], qui avaient posé les bases de cette approche en acoustique, on trouve des applications en élasticité, par exemple dans l'article [54]. La difficulté peut s'illustrer de manière simple en remarquant que le champ de pression acoustique présente un saut à la traversée de la surface rayonnante ou diffractante: voir Figure 15.

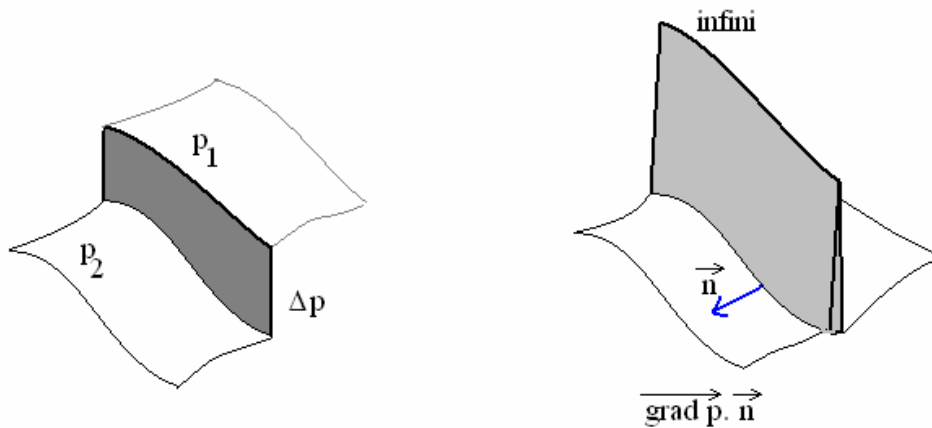


Figure 15: Illustration naïve de l'allure de la pression et de l'accélération normale au voisinage d'une surface en mouvement au sein d'un fluide acoustique. Ce genre de représentation, condamné par la rigueur, est pourtant bien utile au physicien qui a besoin d'une image pour comprendre.

Or c'est précisément sur cette surface qu'on écrit l'équation intégrale ! En fait la dérivée normale de la pression, proportionnelle à l'accélération de la surface, a une valeur finie, la même de chaque côté. Intuitivement, on peut dire que c'est à elle que doit correspondre la partie finie de l'intégrale (intégrale qui porte, faut-il le rappeler, sur le saut de pression Δp^*).

Face à ce problème, certains chercheurs ont voulu contourner la difficulté en supprimant l'hypersingularité:

- en utilisant des relations de la théorie du potentiel (équation de Laplace). Ces relations, admises sans discussion car la théorie date de nombreuses décennies, traitent en fait l'hypersingularité dans le cas de Laplace. Comme localement elle est de même nature que l'hypersingularité dans le cas d'Helmholtz, la technique consiste à retrancher une expression intégrale hypersingulière de résultat connu et à rajouter ce résultat. Cette approche a connu de nombreuses variantes (avec ou sans développement de Taylor de l'inconnue, etc...), certaines encore assez récentes [55,

- 56]. A signaler que certaines de ces relations sont présentes dans l'article [11], mais pour un autre objectif, la description des modes à fréquence nulle.
- en régularisant l'hypersingularité par une formule en dérivée tangentielle sur la surface qui réduit l'ordre de singularité [57].
 - en régularisant par l'emploi de relations entre opérateurs intégraux présentant des singularités d'ordres différents [42, 58]. Toutes ces approches ne fonctionnent semble-t-il que sur des surfaces fermées, ce qui est un handicap sérieux.
 - en régularisant par une formulation variationnelle menant à deux niveaux d'intégration de surface. La singularité disparaît, mais le calcul est plus lourd en termes de développement et de temps machine. Voir à ce sujet Jeans et Mathews [59] citant les travaux de Mariem et Hamdi [60].
 - en faisant une analyse détaillée du passage à la limite 'point d'évaluation \rightarrow surface'. Guiggiani et al. [61] présentent une analyse très générale et très convaincante, qui montre bien comment se compensent deux quantités tendant vers l'infini. Un exemple trivial de ce mécanisme est obtenu si l'on dérive deux fois par rapport à la distance h l'inverse de la distance d d'un point à un plan. Voir Figure 16. A aucun moment, ces auteurs ne font appel au concept de partie finie. Ils se limitent à des méthodes d'analyse classique. En découvrant la longueur et la complexité des calculs, on comprend pourquoi cette clarification n'est pas intervenue plus tôt !

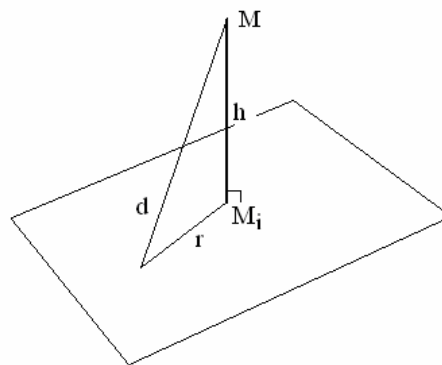


Figure 16 schéma du calcul de l'intégrale pour le point M extérieur au plan de l'élément, et tendant vers le centre M_i de l'élément.

L'autre option est d'appliquer le concept de partie finie de Hadamard. Qu'est-ce que la partie finie de Hadamard ?

i. *Définition et calcul de la partie finie de Hadamard*

Il n'est pas question ici d'en refaire une théorie mathématique, mais de montrer comment appréhender 'intuitivement' cet outil au service du modélisateur. La partie finie de Hadamard, comme la valeur principale de Cauchy, dont elle est une généralisation, prend place dans le cadre de la théorie des distributions de L. Schwartz. Cette théorie généralise la notion de dérivée aux fonctions non continues. On connaît la relation élémentaire qui relie

le Dirac et la fonction de Heaviside: $H'(t)=\delta(t)$. En termes de partie finie, on peut calculer des intégrales non définies en théorie classique des fonctions. Par exemple:

$$P.F.\int_{-a}^a \frac{dx}{x^2} = -\frac{2}{a} \quad \text{Eq. 5}$$

Prenons 3 exemples d'intégrales sur \mathbb{R} . On suit la présentation de [62], elle-même proche de [63].

$$P.F.\int_{-\infty}^{+\infty} H(x) \frac{dx}{x^2} = P.F.\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^{\infty} - \frac{1}{\varepsilon} \right] = 0$$

$$P.F.\int_{-\infty}^a H(x) \frac{dx}{x^2} = P.F.\int_0^a \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{x^2} - \frac{1}{\varepsilon} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left[-\frac{1}{x} \right]_{\varepsilon}^a - \frac{1}{\varepsilon} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{a} \right] = -\frac{1}{a}$$

Par symétrie on en déduit (Eq. 5)

$$\begin{aligned} P.F.\int_0^a \varphi(x) \frac{dx}{x^2} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^a \varphi(x) \frac{dx}{x^2} - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0) \ln \varepsilon \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^a \frac{\varphi(0) + x\varphi'(0) + \frac{x^2}{2}\varphi''(0)}{x^2} dx - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0) \ln \varepsilon \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left[-\frac{\varphi(0)}{x} \right]_{\varepsilon}^a + \varphi'(0) [\ln(x)]_{\varepsilon}^a + \left[\frac{1}{2}\varphi''(0)x \right]_{\varepsilon}^a - \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} + \varphi'(0) \ln \varepsilon \right] \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{\varphi(0)}{a} + \varphi'(0) \ln(a) + \frac{1}{2}\varphi''(0)a \right] = -\frac{\varphi(0)}{a} + \varphi'(0) \ln(a) + \frac{1}{2}\varphi''(0)a \end{aligned}$$

Le principe est toujours de retrancher à l'intégrale la partie divergente obtenue par développement au pôle. On en déduit la partie finie de l'intégrale de

$$\frac{\varphi(r, \theta)}{r^3}$$

sur un disque $D(a)$ de rayon a :

$$P.F.\iint_{D(a)} \varphi(r, \theta) \frac{ds}{r^3} = 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^a M_{\varphi}(r) \frac{dr}{r^2} - \frac{M_{\varphi}(0)}{\varepsilon} \right] \quad (\text{Eq. 6})$$

où $M_{\varphi}(r)$ est la moyenne sur un cercle de rayon r de la fonction $\varphi(r, \theta)$, (r, θ) étant les coordonnées radiales [62, p. 131]. La dérivée seconde dans la direction radiale de la fonction $\varphi(r, \theta)$ intervient dans le résultat. La dérivée première n'intervient pas, sa contribution s'annule par symétrie.

ii. *Historique*

Le processus a été défini dès l'origine pour des singularités d'ordre quelconque [64]. On trouve dans cet ouvrage une étrange double, voire triple paternité de la partie finie:

On sait que l'expression "partie finie d'une intégrale divergente" a été introduite par d'Adhémar dans sa thèse déposée à la Sorbonne en 1903 et soutenue en 1904. Se référant à l'article d'Hadamard du 7 décembre 1903, d'Adhémar écrit: "Indépendamment l'un de l'autre, nous avons reconnu le rôle de ces 'parties finies'. Dans la thèse de d'Adhémar cette notion était appliquée à la construction des solutions des équations pour les ondes cylindriques, alors qu'Hadamard utilisait les parties finies dans la solution du problème de Cauchy pour des équations du second ordre, à coefficients variables et un nombre quelconque de variables..... Il est assez surprenant de noter que la régularisation de l'intégrale divergente

$$\int_0^h \frac{f(x)}{x^{r+1}} dx$$

où r est un nombre non entier positif, a déjà été faite par Cauchy.... Il appela cette expression 'l'intégrale extraordinaire' et cela avait le même sens que ce que nous faisons aujourd'hui.

Par la suite L. Schwartz a intégré ce concept dans sa théorie des distributions; l'intégrande de la partie finie est pour lui une distribution, dénommée parfois 'pseudo-fonction', et notée aussi P.F..

iii. **Fondements du résultat utilisé**

Comment parvient-on à la relation (Eq. 4) ? La dépendance au temps retardé et l'hypothèse " C^0 en espace, C^1 en temps" permettent d'écrire sur l'élément:

$$-\frac{1}{c} \Delta \dot{p}^* = \frac{\partial(\Delta p^*)}{\partial r}$$

où r est la coordonnée radiale sur la facette. En utilisant cette dernière formule, et la dérivée de la pseudo-fonction $P.F.(1/r)$ [62], on obtient l'expression:

$$\frac{\Delta \dot{p}^*}{cr^2} + \frac{\Delta p^*}{r^3} = \text{div} \left(-\frac{\Delta p^* \vec{u}}{r^2} \right) + \Delta p^* \delta'(r) \quad (\text{Eq. 7})$$

\vec{u} étant le vecteur unitaire radial.

En divisant l'élément triangle T_i en un disque intérieur $D(R)$ de rayon R et en son complémentaire $T_i - D(R)$, on trouve l'expression

$$\begin{aligned} F.P. \iint_{T_i} \left[\frac{\Delta \dot{p}^*}{cr^2} + \frac{\Delta p^*}{r^3} \right] ds &= \iint_{T_i - D(R)} \left[\frac{\Delta \dot{p}^*}{cr^2} + \frac{\Delta p^*}{r^3} \right] ds + F.P. \iint_{D(R)} \left[\frac{\Delta \dot{p}^*}{cr^2} + \frac{\Delta p^*}{r^3} \right] ds \\ &= -\oint_{\partial T_i} \frac{\Delta p^*}{b_i} d\theta + \oint_R \frac{\Delta p^*}{R} d\theta + F.P. \iint_{D(R)} \left[\frac{\Delta \dot{p}^*}{cr^2} + \frac{\Delta p^*}{r^3} \right] ds \end{aligned}$$

Avec les relations (Eq. 6) et (Eq. 7), on en tire (Eq. 4):

$$\begin{aligned}
 & F.P. \iint_{T_i} \left[\frac{\Delta \dot{p}^*}{c r^2} + \frac{\Delta p^*}{r^3} \right] ds \\
 &= -\oint_{\partial T_i} \frac{\Delta p^*}{b_i} d\theta + \oint_R \frac{\Delta p^*}{R} d\theta + F.P. \iint_{D(R)} \left[-\operatorname{div} \left(\frac{\Delta p^* \bar{u}}{r^2} \right) \right] ds + \iint_{D(R)} \Delta p^* \delta'(r) ds \\
 &= -\oint_{\partial T_i} \frac{\Delta p^*}{b_i} d\theta + \oint_R \frac{\Delta p^*}{R} d\theta + 2\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{\varepsilon}^R \Delta p^*(r) \frac{dr}{r^2} - \frac{\Delta p^*(0)}{\varepsilon} \right] - \frac{2\pi \Delta \dot{p}^*(0)}{c} \\
 &= -\oint_{\partial T_i} \frac{\Delta p^*}{b_i} d\theta + 2\pi \frac{\Delta p^*(R)}{R} - 2\pi \frac{\Delta p^*(R)}{R} - \frac{2\pi \Delta \dot{p}^*(0)}{c} \\
 &= -\oint_{\partial T_i} \frac{\Delta p^*}{b_i} d\theta - \frac{2\pi}{c} \Delta \dot{p}^*(M_i)
 \end{aligned}$$

iv. *Signification physique*

Il est toujours instructif et utile pour le physicien (et même indispensable en mécanique) de donner un sens à l'opération mathématique réalisée. La partie finie de l'intégrale hypersingulière est obtenue en retranchant les termes infinis provenant du développement de Taylor de la fonction à intégrer. Dans le cas du noyau hypersingulier 'statique'

$$\frac{1}{r^3}$$

à intégrer sur une surface de disque, le résultat

$$P.F. \iint_{D(a)} \frac{ds}{r^3} = -2\pi / a$$

d'après (Eq. 6), doit être égal à la limite pour $h \rightarrow 0$ de l'intégrale calculée depuis un point extérieur (voir Figure 16). Cette intégrale vient de la double dérivée normale :

$$\begin{aligned}
 & \iint_{D(a)} -\frac{\partial^2}{\partial h^2} \left(\frac{1}{(h^2 + r^2)^{1/2}} \right) ds = -2\pi \int_0^a \frac{\partial^2}{\partial h^2} \left(\frac{1}{(h^2 + r^2)^{1/2}} \right) r dr \\
 &= -2\pi \int_0^a \frac{\partial}{\partial h} \left(\frac{-h}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \right) r dr = -2\pi \int_0^a \left[\frac{-1}{(h^2 + r^2)^{3/2}} - 3 \frac{-h^2}{(h^2 + r^2)^{5/2}} \right] r dr \\
 &= -2\pi \int_0^a \left[\frac{-r}{(h^2 + r^2)^{3/2}} + 3h^2 \frac{r}{(h^2 + r^2)^{5/2}} \right] dr \\
 & \iint_{D(a)} -\frac{\partial^2}{\partial h^2} \left(\frac{1}{(h^2 + r^2)^{1/2}} \right) ds = -2\pi \left[\frac{1}{(h^2 + r^2)^{1/2}} - 3h^2 \frac{1}{3} \frac{1}{(h^2 + r^2)^{3/2}} \right]_0^a \\
 &= -2\pi \left(\frac{1}{(h^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{1}{h} - \frac{h^2}{(h^2 + a^2)^{3/2}} + \frac{1}{h} \right) \\
 &= -2\pi \left(\frac{1}{(h^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{h^2}{(h^2 + a^2)^{3/2}} \right)
 \end{aligned}$$

Le passage à la limite donne :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \iint_{D(a)} -\frac{\partial^2}{\partial h^2} \left(\frac{1}{(h^2 + r^2)^{1/2}} \right) ds = -2\pi \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(h^2 + a^2)^{1/2}} - \frac{h^2}{(h^2 + a^2)^{3/2}} \right) = -2\pi / a$$

Il apparaît une analogie avec la partie finie: les termes divergents (1/h) s'annulent mutuellement. Mais cette fois ils concernent la distance à la surface et non la coordonnée radiale sur la surface. Le calcul de la partie finie exprime de manière localisée en l'origine, dans la direction radiale, une propriété du noyau présente aussi, sous forme continue, dans la direction normale. Le noyau intégré est un objet tridimensionnel, dont le comportement dans les diverses directions est isotrope. La singularité (distribution) en l'origine $r = 0$ n'est que la marque, dans le plan passant par l'origine, de propriétés présentes de manière continue lorsque h reste non nul. L'hypersingularité concentre en un point (un espace de mesure nulle) les variations de la fonction

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : & \quad -\frac{\partial^2}{\partial h^2} \left(\frac{1}{(h^2 + r^2)^{1/2}} \right) \\ \text{ou} \\ Gr(r) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : & \quad -2\pi \left[\frac{-r}{(h^2 + r^2)^{3/2}} + 3h^2 \frac{r}{(h^2 + r^2)^{5/2}} \right] \end{aligned}$$

La fonction Gr est représentée en Figure 17. La courbe rouge ($h = 0$) correspond à la fonction $2\pi / r^2$. Pour les autres valeurs de h , on voit clairement les contributions positive et négative à l'intégrale, tendant toutes deux vers l'infini, mais aboutissant, on le sait, à sa valeur négative finie.

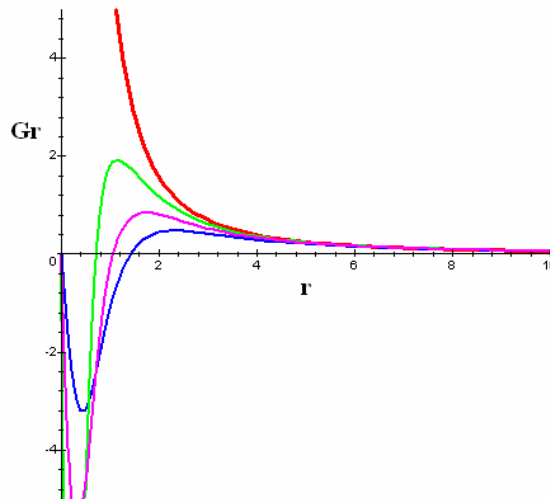


Figure 17: Fonction $Gr(r)$ à intégrer, $h = 0$ (rouge), $h = 0.5$ (vert), $h = 0.75$ (magenta), $h = 1$ (bleu).

Cette analyse classique 'continue' a été traitée de manière plus générale par [61]. La théorie des distributions fait le passage au discontinu en amont de ce traitement, dans un cadre

beaucoup plus général. En se basant sur des considérations plus profondes, elle évite justement de faire cette analyse de passage à la limite détaillée pour chaque cas d'application. On retrouve ici la propriété bien connue des distributions de toujours autoriser la dérivation. La pseudo-fonction (ou distribution) $P.F.(1/r^2)$ diffère de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$: $1/r^2$ en ce qu'elle se déduit par double dérivation de $P.F.(\ln(1/|r|))$.

v. *Conclusion et difficulté de diffusion de la partie finie*

D'après le paragraphe (i), il est clair que les dérivées spatiales en $r = 0$ de la fonction à intégrer $\varphi(r, \theta)$ interviennent dans le calcul de la partie finie. Si la surface est non plane (courbure finie ou localement infinie), le calcul en est encore compliqué, puisque l'élément d'intégration de surface change d'expression. On voit donc que le cas traité ici (constant en espace, linéaire en temps) peut très vite se complexifier. C'est une des raisons pour laquelle des éléments géométriquement simples sont généralement retenus pour ces calculs.

Le problème est souvent posé en fréquentiel. Le passage formel par une transformation de Fourier suffit théoriquement pour aller du temporel au fréquentiel. Même si, dans la pratique numérique, la chose est moins simple, on retiendra qu'on conserve les aspects principaux de la partie finie de Hadamard, liées au noyau purement géométrique

$$\frac{1}{r^3}.$$

La théorie des distributions ne semble pas s'être diffusée outre-Atlantique, du moins pour ce qui est du domaine de la mécanique. La partie finie selon Kolm et Rokhlin [66] et les auteurs américains en général est (encore) définie après un passage à la limite 'pré-Schwartzien', qui renvoie en fait aux travaux conclus magistralement, du moins en fréquentiel et en statique, par l'article de Guiggiani et al. [61]. C'est-à-dire, comme l'affichent ses auteurs, sans faire appel à un concept nouveau par rapport à l'analyse mathématique traditionnelle. Pour une approche réellement 'distributions' 'post-Schwartzienne', il faut se tourner vers l'article [65]. Mais il s'agit d'un travail mathématique et numérique sans application directe à nos équations. De plus, on observe que selon le contexte, le terme 'partie finie' peut changer de contenu. Selon les cas les auteurs vont appeler partie finie la seule hypersingularité ou bien sa généralisation comportant aussi les singularités d'ordre inférieur (valeur principale de Cauchy par exemple). Les définitions de Mastronardi et Occorsio [65] et de Kolm et Rokhlin [66], par exemple, sont différentes.

On ne trouve nulle part un exposé clair comparant le formalisme 'distributions' et les autres approches plus continues. Ce travail est encore à faire. En particulier, on devrait montrer, avec plus de détail que dans ce rapport, la capacité de la théorie des distributions à fournir les mêmes résultats généraux (et néanmoins pratiques) que l'article [61]. La singularité est alors traitée en amont, au sein de la théorie.

Revenons au logiciel ASTRYD. Où se situe-t-il dans ce paysage ? Il occupe une place assez originale, avec son traitement temporel des éléments minces donc hypersinguliers. On voit que les références citées se situent presque toujours en représentation fréquentielle. Avec son intégration directe en collocation sur éléments (C^0 ,

C¹) il se situe dans la lignée des travaux pionniers de Kawai et Terai [67] en 1990. Mais il en étend la portée par une intégration temporelle plus précise sur des éléments triangulaires.

En conclusion, on notera que dans le débat scientifique concernant les intégrales hypersingulières en éléments frontières, au-delà des aspects choquants pour l'intuition naïve de la partie finie, une partie de la difficulté est venue des différences de culture mathématique et de questions de terminologie.

6.2 Transformée de Hilbert, matrices de transfert, FMM : l'analytique, une technique dépassée ?

i. *Transformées de Fourier et de Hilbert*

POINT SENSIBLE N°8: AVEC UN PEU DE CALCUL ANALYTIQUE ET UN BON LOGICIEL DE MATHÉMATIQUES, ON PEUT CALCULER LES TRANSFORMÉES DE HILBERT ET DE FOURIER SUR DES ÉTENDUES FRÉQUENTIELLES TRÈS IMPORTANTES, INACCESSIBLES À LA FFT.

Les articles [68 - 69] montrent deux exemples où l'appel au calcul analytique permet de repousser des limites qui paraissaient difficilement surmontables. Il s'agit dans chaque cas de calculer des transformées intégrales sur un grand nombre de décades, avec des fonctions d'origine qui présentent des variations non négligeables sur chaque décade. Le calcul avec la FFT est théoriquement possible dans chaque cas, mais l'échantillonnage correct des basses fréquences joint à l'espacement régulier des points conduit chaque fois à un nombre de points totalement prohibitif. On insère une étape de calcul analytique consistant à calculer la contribution à l'intégrale des différents intervalles entre deux mesures. On fait une hypothèse très naturelle de linéarité de la fonction entre deux mesures. Des hypothèses plus discutables, mais justifiées, sont retenues pour le comportement aux limites non mesurables 0 et $+\infty$.

Outre la qualité des résultats, ces modèles ont aussi un autre avantage: celui d'inviter le chercheur à analyser certains résultats intermédiaires qu'il aurait ignorés dans une approche plus strictement numérique. Par exemple, ici, la zone d'influence d'un seul point de mesure sur la transformée de Hilbert, ou sur la transformée inverse de Fourier. Ceci permettant de répondre à la question: jusqu'où s'étend l'effet d'une mesure erronée sur le résultat final ?

ii. *Matrices de transfert*

POINT SENSIBLE N°9: L'APPROCHE ANALYTIQUE FOURNIT UNE BASE DE REPRÉSENTATION ÉCONOME EN CALCUL ET UTILE À LA COMPRÉHENSION.

Il s'agit ici du modèle de coque cylindrique raidie traité par matrices de transfert (cf §4.2). La méthode peut être considérée comme contenant une grande part d'analytique, puisqu'on intègre sans discrétisation ni approximation les équations différentielles de coque, plaque et fluide. On obtient ainsi les transferts sur les divers éléments du système (y compris le fluide extérieur). Le calcul permet de découvrir certains types d'ondes couplées fluide-structure non évidents *a priori*.

Les aspects physiques du phénomène sont décrits au §4.2. On relèvera seulement ici les informations intéressantes livrées par ce modèle analytique. L'objectif de cette modélisation était le calcul de la coque immergée. Le modèle analytique fournit une grille d'analyse inconnue du modèle discrétisé: la base des ondes propres de la structure périodique, obtenues comme vecteurs propres de l'opérateur de transfert d'un tronçon. La réponse de la coque à une excitation localisée est une somme d'ondes (somme de solutions élémentaires du système différentiel en x , variable axiale). Chaque onde a ses propres caractéristiques de rayonnement. Dans une plaque plane *in vacuo*, on aurait pour chaque direction de propagation une onde plane évanescence et une onde plane propagative. Dans la plaque immergée, l'onde évanescence de structure possède un rayonnement et l'onde propagative est rayonnante ou non selon la longueur d'onde. En coque raidie, les perturbations apportées par les raidisseurs sont susceptibles de renforcer le rayonnement par accélération des ondes, ou par conversion entre modes de flexion et longitudinaux, mais aussi de le réduire par ralentissement de certains modes de propagation. Les solutions évanescences dans la direction axiale sont, dans les bandes interdites, des avatars des ondes propagatives. Elles-mêmes peuvent se révéler plus ou moins rayonnantes selon le comportement des raidisseurs. A chaque composante 'onde' de la réponse, on peut associer sa contribution au rayonnement. Ainsi le modèle analytique permet d'effectuer un tri au sein d'un phénomène complexe.

L'influence de l'amortissement de structure peut aussi être observé mode propagatif par mode propagatif, son effet pouvant être très contrasté selon les modes. Naturellement, à chaque fréquence, la puissance acoustique émise résulte des interférences et ne peut se déduire de la seule décomposition en ondes; cependant en moyenne sur une bande de fréquence les effets interférentiels tendent à se compenser et l'on peut attribuer une part de puissance rayonnée à chaque type d'onde.

On trouve ici un excellent exemple de la manière dont physique et mathématique s'éclairent mutuellement. Le fait que Borgiotti et Rosen [70] aient publié sur ce type de modèle en 1993 montre que son intérêt restait réel malgré le développement des approches purement numériques. L'utilisation de cet outil par la Marine est attestée encore en 2004, 25 ans après le démarrage des études sur le sujet. Et son champ d'utilisation s'est étendu aux coques de torpilles. Cette application illustre l'idée selon laquelle « une bonne avancée théorique en termes de concept de modélisation vaut mieux qu'un raffinement de l'intégration numérique ». En effet le domaine fréquentiel atteint est sans commune mesure avec ce que permettaient les éléments finis à l'époque, et reste encore tout à fait compétitif.

Inversement, la connaissance du phénomène physique facilite la résolution des problèmes numériques. Dans l'article [17], on montre comment on a résolu un problème d'overflow numérique dans le calcul de réponse. L'overflow était dû aux ondes évanescences les plus marquées, qui, dans le transfert produisaient des valeurs très petites ou très grandes, supérieures aux capacités de la machine. Il a suffi de négliger les ondes correspondantes là

où leur contribution est effectivement très petite devant les autres termes pour traiter le problème, ce qui s'est traduit par une évolution limitée du noyau du code de calcul, connue sous le nom de technique MTR (des matrices de transfert réduites).

iii. *FMM*

POINT SENSIBLE N°10: LA METHODE MULTIPOLE RAPIDE (FMM) MET A PROFIT DES RELATIONS ANALYTIQUES POUR CODER DE MANIERE PLUS SYNTHETIQUE LES INFLUENCES LOINTAINES DANS LA FORMULATION INTEGRALE. ELLE FONCTIONNE AUSSI EN RAYONNEMENT SOUS-CRITIQUE.

Principe

La référence est la communication [48] et la proposition d'article [36]. Après discrétisation de (Eq.3) avec l'hypothèse de fonction constante par éléments (hypothèse C^0), nous sommes conduits pour une résolution itérative à calculer en tous les points P_i , les sommes

$$\sum_p G(P_i, Q_p) v_p,$$

où G est le noyau de Green ou sa dérivée normale. Il s'agit donc du produit scalaire de la ligne i de la matrice par le vecteur v . Cette opération élémentaire est à répéter de multiples fois. Elle conditionne le coût du calcul.

L'idée de la FMM est d'accélérer le calcul de ces produits en utilisant un algorithme spécial pour les influences entre éléments éloignés. Ceci est possible parce que la fonction de Green possède des propriétés qui permettent un codage efficace des influences 'lointaines'. L'influence entre éléments proches est quant à elle traitée par les formules habituelles en technique d'éléments frontières. Les éléments sont regroupés en cellules. Dans l'exemple fictif du produit matrice-vecteur de la Figure 18, le produit de la ligne 'i' par le vecteur 'v' comprend 4 cellules éloignées et deux cellules proches.

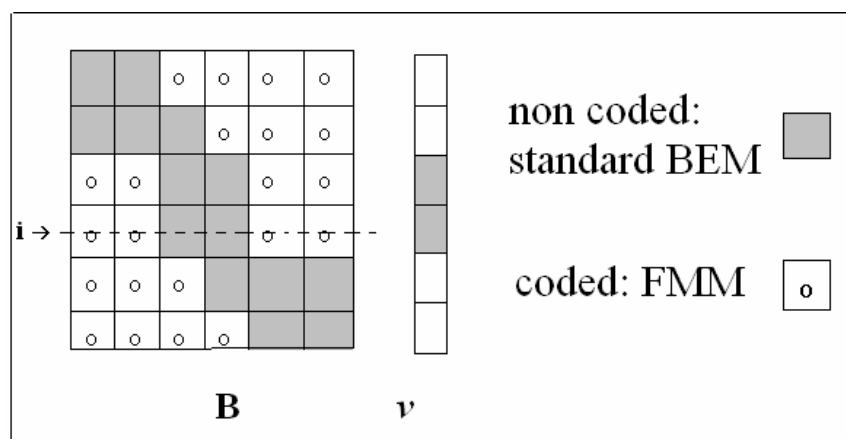


Figure 18: Produit matrice-vecteur sur un maillage divisé en 6 cellules.

Une fois les éléments regroupés en cellules, on construit la fonction de rayonnement de chaque cellule. Puis on transfère cette information de centre de cellule à centre de cellule. Appelons N le

6. Mathématiques et modélisation: quelques exemples

nombre d'éléments et N_c le nombre de cellules. $N_c \ll N$. En FMM 1-niveau, on a $N_c \approx \sqrt{N}$. Le transfert n'est à faire que N_c^2 fois, un nombre très inférieur à N^2 , comme illustré par la Figure 19.

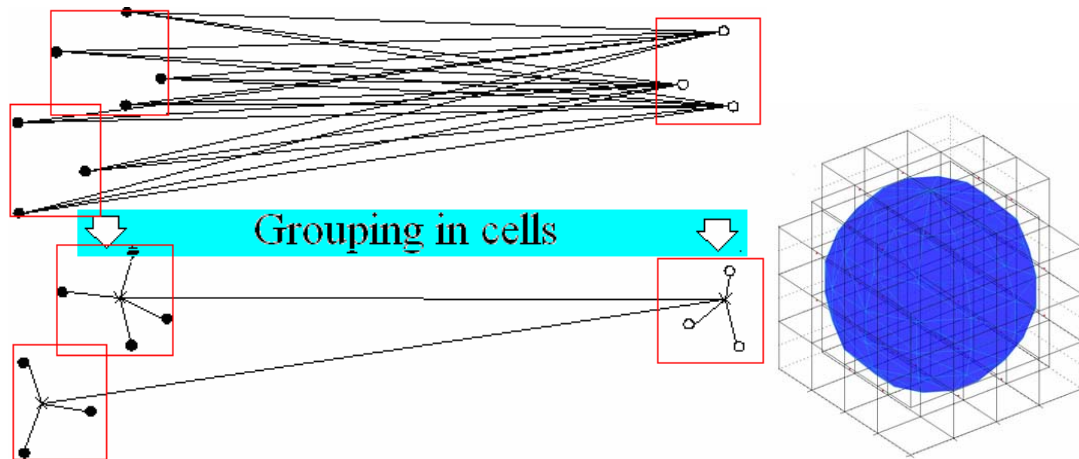


Figure 19 : Gauche : Accélération du calcul des influences lointaines par regroupement en cellules. Les segments représentent les transferts à calculer pour obtenir l'influence des 2 paquets (ou cellules) de gauche (4 et 3 éléments) sur le paquet de droite (3 éléments).

Droite : exemple de cellules cubiques utilisées.

Il reste alors à transférer l'information depuis le centre de la cellule réceptrice à chaque élément de la cellule. Le décompte d'opérations élémentaires à effectuer pour réaliser tout le processus concernant les effets 'lointains' est de l'ordre de $O(N_c^2)$ pour les transferts entre cellules et il est en $O(2 N) = O(N)$ pour les transferts internes aux cellules. Avec $N_c \approx \sqrt{N}$, on trouve donc $O(N)$ opérations 'élémentaires' à effectuer au lieu de $O(N^2)$ avec l'approche BEM standard. Ceci à chaque pas de l'itération de résolution du système. Le gain asymptotique sur les très grands maillages pour ces influences 'lointaines' est donc d'un facteur N .

Raffinements

Le coût de l'opération 'produit matrice-vecteur' est conditionné par les influences proches (cellules grisées de la Figure 18). Il dépend en fait de la proportion de couples de cellules proches sur le total des couples de cellules. En FMM 1-niveau, le nombre de couples de cellules proches est $O(N_c)$, car chaque cellule a un nombre fixe de voisines à prendre en compte (typiquement $3^3 = 27$, nombre indépendant de la taille du problème). Dans chaque cellule on a $O(N_c)$ éléments, du fait de la relation $N_c \approx \sqrt{N}$, et donc $O(N_c)$ influences proches à traiter par élément. Donc $O(N_c^2) = O(N)$ calculs élémentaires sont à faire pour chaque cellule. Au total pour toutes les cellules, on aboutit à un décompte d'opérations

6. Mathématiques et modélisation: quelques exemples

élémentaires en $O(N).O(N_c) = O(N^{3/2})$. Le coût du calcul FMM 1-niveau est donc contrôlé par les influences proches et croît comme $N^{3/2}$ [71, 72].

L'approche multi-niveaux constitue des super-cellules, comme en Figure 20 (bas). Elle revient à former des regroupements de plus en plus importants lorsque la distance s'accroît : plus la cellule est lointaine, plus la cellule est grosse. Ceci est justifié pour des maillages très riches. Une estimation rapide du coût de calcul du produit matrice-vecteur montre que les influences proches et lointaines ont pratiquement le même poids à la limite $N \rightarrow \infty$. En effet la proportion de couples d'éléments en influence proche tend vers 0. Il reste cependant les influences entre voisins proches. Donc le volume de calcul des influences proches tend vers une variation en $O(N)$. En revanche la multiplication des transferts interniveaux pour les influences lointaines et l'augmentation de la taille des paquets tend à augmenter leur poids dans le calcul. Un examen détaillé conduit à $O(N \log N)$ [73] ou $O(N \log^2 N)$ [71, 72], toutes variations indiscernables de $O(N)$ en pratique sur des cas facilement accessibles sur PC.

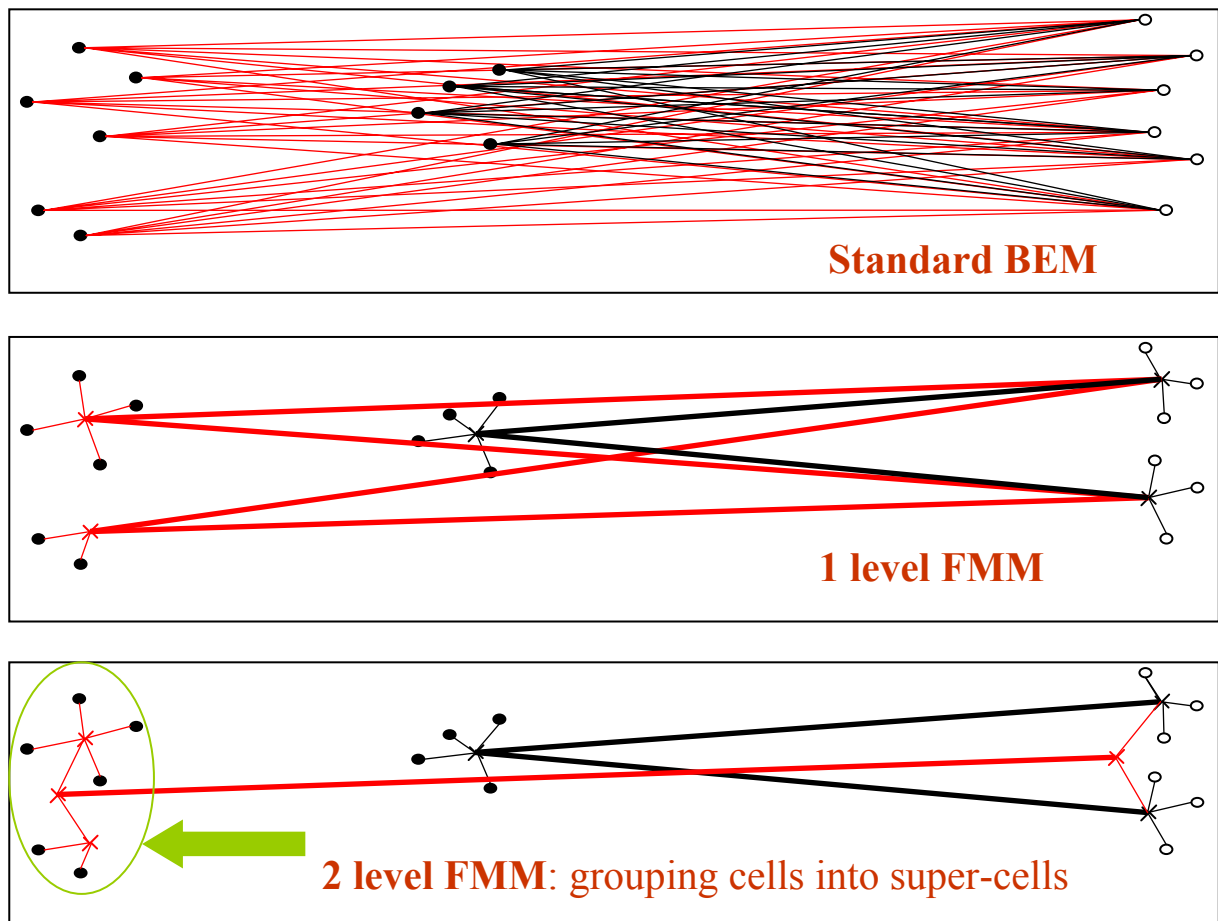


Figure 20 : FMM multi-niveaux : figure du bas, vue des transferts. Plus la cellule est éloignée, plus la cellule regroupe d'éléments. Dans chaque cadre un segment figure un transfert à calculer pour obtenir l'influence sur les 2 paquets de droite des 3 paquets de gauche. Parmi ces paquets de gauche deux sont éloignés des récepteurs, un moins éloigné sans être proche.

Raffinements supplémentaires

Naturellement le concept d' 'opération élémentaire' employé ici est questionnable. Il convient de rentrer davantage dans le détail pour confirmer les gains estimés ci-dessus d'une manière grossière. La démarche FMM est résumée dans le Tableau 4.

Les notations sont les suivantes : $j = \sqrt{-1}$, $\exp(-j\omega t)$ est la convention temporelle, r_{PQ} est le vecteur \overrightarrow{PQ} , S^2 est la sphère unité, avec pour coordonnées $\mathbf{s} = (\theta, \varphi)$ et l'élément de surface est ds . Chaque point de la sphère unité représente une onde plane propagative. En réalité, les expressions en 's' sont des expressions du domaine de Fourier spatial, où l'on se restreint aux composantes propagatives seulement. Les points de développement M et L sont indépendants du point source Q et du point d'observation P, l'expression de la fonction de Green pour un autre couple de points Q' et P' (proches respectivement de M et L) utilisera M et L toujours de la même manière. Voir Figure 21 . j_n et h_n sont respectivement les fonctions de Bessel et Hankel sphériques, et P_n le polynôme de Legendre de degré n.

Domain	Physical space	FT space	FT space	Physical space
Assumption		Nearest field components neglected		Expansion point sufficiently close to computing points.
Operation	Grouping in cells	Plane wave expansion = representation of distant field	Translation from cell to cell	Local expansion = synthesis of the physical field

Gegenbauer formula

$$G(P, Q) = \frac{jk}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) h_n^{(1)}(k|r_{LM}|) j_n(k|r_{PL} + r_{MQ}|) P_n(\cos(r_{PL} + r_{MQ}, r_{LM})) \quad (6)$$

Plane wave expansion

$$j_n(k|r_{PL} + r_{MQ}|) P_n(\cos(r_{PL} + r_{MQ}, r_{LM})) = \frac{j^n}{4\pi} \int_{S^2} P_n(\cos(s, r_{LM})) e^{jk\langle s, r_{PL} \rangle} e^{jk\langle s, r_{MQ} \rangle} ds \quad (7)$$

Tableau 4: Schéma du processus menant à la FMM

A l'aide de la formule de Gegenbauer et de la relation de représentation en ondes planes (Tableau 4), on code l'information 'influence lointaine' sous une forme peu coûteuse. Les deux formules sont valables

6. Mathématiques et modélisation: quelques exemples

pour des paquets suffisamment distants. Il est alors possible d'exprimer la fonction de rayonnement de cellule avec un nombre relativement restreint et constant d'ondes planes, car elle ne comporte pas de composantes évanescentes. Ces ondes planes correspondent à des points de la sphère unité, dans l'espace (transformé de Fourier spatial) des nombres d'onde.

Des relations (Tableau 4), et par troncature du développement du noyau de Green à n_{\max} termes, on déduit la relation de transfert de Q vers P:

$$G(P, Q) \approx \frac{jk}{(4\pi)^2} \int_{S^2} e^{jk\langle s, r_{PL} \rangle} T_{n_{\max}, r_{LM}}(s) e^{jk\langle s, r_{MQ} \rangle} ds \quad (\text{Eq. 7})$$

avec l'opérateur de translation $T_{n_{\max}, r_{LM}}$:

$$T_{n_{\max}, r_{LM}}(s) = \sum_{n=0}^{n_{\max}} (2n+1) j^n h_n^{(1)}(k|r_{LM}|) P_n(\cos(s, r_{LM}))$$

Processus de l'algorithme

Réécrivons (Eq. 7) sous la forme équivalente (Eq. 8).

$$G(P, Q) = \frac{e^{jk|r_{PQ}|}}{4\pi|r_{PQ}|} = \int_{S^2} f_3(r_{PL}, s) f_2(r_{LM}, s) f_1(r_{MQ}, s) ds \quad (\text{Eq. 8})$$

Si l'on calcule le produit ligne-vecteur, on obtient avec (Eq. 8):

$$\begin{aligned} \sum_{Q_p \in C_m} G(P, Q_p) v_p &= \sum_{Q_p \in C_m} \int_{S^2} f_3(r_{PL}, s) f_2(r_{LM}, s) f_1(r_{MQ_p}, s) v_p ds \\ &= \int_{S^2} f_3(r_{PL}, s) f_2(r_{LM}, s) \sum_{Q_p \in C_m} f_1(r_{MQ_p}, s) v_p ds \end{aligned}$$

$F_m(s)$ est la fonction de rayonnement du paquet de sources situées dans la cellule C, exprimée en termes d'ondes planes:

$$F_m(s) = \sum_{Q_p \in C} f_1(r_{MQ_p}, s) v_p$$

$T_{LM}(s)$ est l'opérateur de translation. Il opère le transfert, pour toute onde plane, depuis le centre M de la cellule rayonnante jusqu'au centre de la cellule réceptrice L:

$$T_{LM}(s) = f_2(r_{LM}, s)$$

L'intégrale (Eq. 9) construit le champ physique au point P à partir des composantes en ondes planes $X(s)$:

$$\int_{S^2} f_3(r_{PL}, s) X(s) ds \quad (\text{Eq. 9})$$

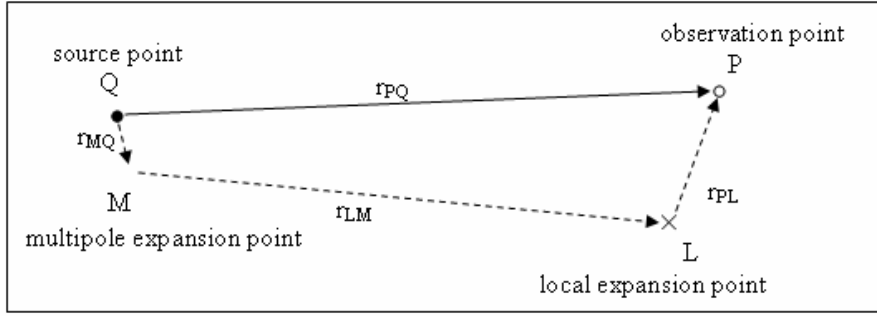


Figure 21 : Schéma des points Q, M, L et P

Nouvelle évaluation du gain

Il est clair que si les cellules de regroupement comportent un nombre suffisant d'éléments et si l'opérateur de translation n'est pas trop coûteux à calculer, le coût de calcul va décroître de manière significative. Le processus sera efficace si le codage de la fonction de rayonnement dans la représentation en ondes planes demande moins de composantes que son codage dans l'espace physique. Ce sera en général le cas, car dans l'espace physique, il est nécessaire de considérer toutes les combinaisons de positions spatiales deux à deux, et non dans le domaine transformé de Fourier spatial. Voir Figure 19 et Figure 20. Sous forme discrétisée, (Eq. 7) et (Eq. 8) s'écrivent :

$$G(P, Q) \approx \frac{jk}{(4\pi)^2} \sum_q \omega_q e^{jk\langle s_q, r_{PL} \rangle} T_{N, r_{LM}}(s_q) e^{jk\langle s_q, r_{MQ} \rangle}$$

Le décompte plus détaillé des opérations élémentaires en FMM 1-niveau pour les influences lointaines conduit à :

$2Nn_s$ calculs d'exponentielles complexes, où n_s est le nombre de points de discrétisation de la sphère unité. Ce sont les transferts par les voies QM et LP de la Figure 21 .

$N_c^2 n_{\max} \approx N n_{\max}$ calculs de fonctions de Hankel et $N_c^2 n_{\max} n_s \approx N n_{\max} n_s$ calculs de polynômes de Legendre (voie ML dans la Figure 21).

Dès lors que n_{\max} et n_s ne varient pas avec la taille du maillage, et que le coût de calcul de $h_n(x)$ varie peu avec x , la variation de volume de calcul en $O(N)$ est bien confirmée. La réalité est que ces grandeurs sont fixes (en multi-niveau) ou lentement variables (en 1-niveau). Si le calcul des fonctions de Hankel sphériques et des polynômes de Legendre est effectué avec des algorithmes efficaces, si le calcul des fonctions h_n et P_n n'est pas une tâche plus difficile que le calcul de la fonction exponentielle complexe, le calcul en sera d'autant plus compétitif, et on pourra atteindre une réelle économie de temps de calcul.

6. Mathématiques et modélisation: quelques exemples

On remarque aussi que le besoin de stockage en mémoire se limite à la géométrie ($O(N)$) par opposition à la BEM standard, où le besoin est celui de stocker la matrice complète ($O(N^2)$).

Application et validation expérimentale (thèse [34])

Une coque cylindrique de hauteur 0.9 m et de rayon 0.3 m, a été excitée en vibration. Dans le domaine basse fréquence, la longueur d'onde vibratoire est inférieure à la longueur d'onde acoustique. Le champ vibratoire est donc principalement non rayonnant. Une mesure laser de la vibration fournit un champ de vitesse du type de celui représenté en Figure 22 (haut). Le dispositif expérimental est rappelé en 3.5.3ii . Il est très semblable à celui utilisé en [12] pour mesurer la vitesse et la puissance rayonnée d'un caisson avec ouverture. Dans le calcul acoustique, la réflexion sur le sol est prise en compte par une structure image. Puissances mesurée et calculée sont comparées en Figure 22 (bas).

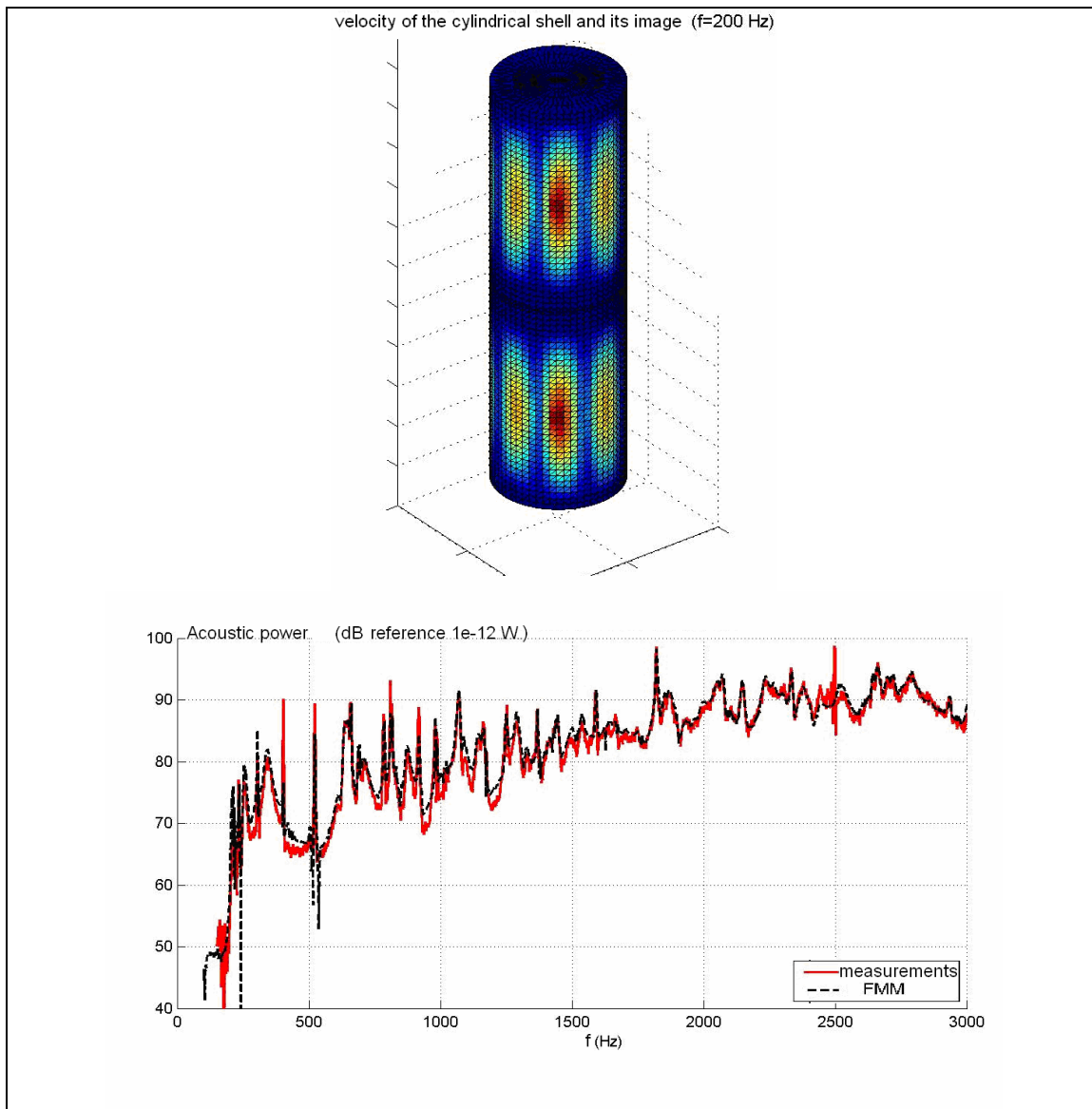


Figure 22: 6960 elements, FMM un niveau

Résumé

En termes physiques, la performance de l'algorithme FMM est liée au comportement évanescent des harmoniques sphériques d'ordres élevés, qui disparaissent lorsqu'on atteint le champ lointain. C'est cette situation qui permet le codage efficace de la fonction de rayonnement de chaque cellule. Le regroupement en cellules et l'utilisation d'une base d'ondes planes aboutissent à une représentation plus synthétique demandant la gestion d'un volume d'informations beaucoup plus faible.

6.3 Conclusion

Les travaux menés encore récemment montrent l'actualité d'un recours à l'approche 'calcul analytique'. Au-delà du cas particulier de la formulation intégrale du rayonnement / diffraction, on a rencontré plusieurs situations où une étape de calcul analytique a permis d'améliorer considérablement les performances des modèles.

Une étape parcourue en analytique, c'est souvent une économie décisive de temps calcul. Ceci bien souvent parce que l'on utilise une représentation synthétique de la réalité (surfaces minces en acoustique, ondes de milieu périodique, FMM). Parfois aussi parce que l'étape de calcul analytique comble un manque des modèles numériques dans des situations extrêmes (exemple des transformées de Fourier et de Hilbert sur 30 décades).

Par ailleurs, l'approche 'analytique' oblige à simplifier le problème, et contraint ainsi à en dégager l'essentiel, tant dans les hypothèses de départ que dans les résultats. C'est ce qu'on a vu dans l'exemple des pipe-lines enterrés (§4.2.i).

L'aspect pédagogique de la modélisation est particulièrement net avec les modèles analytiques: l'influence des différents paramètres est plus claire, parfois totalement explicite. La réflexion préalable à la modélisation, l'obligation de préciser les ordres de grandeur pour faire les bonnes approximations simplificatrices, les analyses de sensibilité facilitées par la légèreté du calcul amènent une foule d'enseignements de grande valeur¹. La compréhension en profondeur de la physique qui en découle est elle-

¹ La force pédagogique du modèle analytique, l'auteur l'a éprouvée *in vivo* lorsqu'il a convaincu un Ingénieur de l'Armement en quelques minutes d'explications sur le choc sous-

même le socle de nouveaux modèles encore plus performants. L'exemple de la transformée de Hilbert est parlant à cet égard : l'idée d'un indicateur de non causalité local en fréquence n'avait rien d'évident au départ. Elle s'est imposée après la construction du modèle semi-analytique de transformation de Hilbert. Voilà un exemple modeste mais concret de la 'digestion, la gestation, l'incorporation' dont parle en termes définitifs M. Serres en exergue de ce chapitre 6. Concrètement, la théorie génère un modèle, qui lui-même autorise un nouvel empirisme, l'appropriation d'un phénomène. Ainsi apparaît une nouvelle source de réflexion engendrant potentiellement de nouvelles idées de modélisation

marin [6, 7] que le phénomène dans la zone critique, la plus exposée, est conditionné uniquement par l'inertie locale de la coque et la cavitation, à l'exclusion de tout effet de rigidité.

7. Apport spécifique et perspectives

Demain:

Encore demain, sans doute, les sites d'où jailliront découverte et création seront des no man's land, lieux flous, indéterminés, en marge des disciplines... E. Morin, p. 50 [74].

Les constantes des travaux menés au long de ces années pourraient se résumer ainsi:

- Ils ont abouti à transférer, vers de nouveaux domaines ou métiers, des méthodes de modélisation issues de la physique et de la mathématique appliquée. Que l'on appelle cela transfert de connaissance ou valorisation de la recherche, il s'agit toujours d'un mouvement global où la modélisation s'implante sur de nouveaux territoires: c'est ainsi que la géologie a fait place à la géophysique, et que l'acoustique empirique a entrepris depuis longtemps sa mutation vers une acoustique scientifique.

- Le but était de décrire, expliquer, prévoir, optimiser, de manière toujours plus réaliste, à l'aide de modèles mathématiques à fort contenu innovant, des comportements acoustiques et vibratoires complexes (parfois multiphysiques) rencontrés dans l'industrie et l'environnement.

- Ils ont montré l'intérêt de parfois se démarquer de la pensée dominante. Même à notre modeste échelle de mécanique 'classique', les exemples ne manquent pas de progrès obtenus par la remise en cause d'idées reçues. Si je m'étais cantonné aux idées consensuelles, j'aurais sans doute douté, à l'époque du démarrage des études:

- de l'existence de résonances marquées de cavités fortement ouvertes
 - de la possibilité de calculs acoustiques réalistes sur ordinateur personnel
 - de la possibilité de traiter 'directement' l'hypersingularité
 - de la possibilité de calculer la transformée de Hilbert sur 30 décades, etc....

- La transdisciplinarité n'a pas manqué, bien au contraire, c'est une marque de fabrique: matériaux, choc, traitement du signal, thermique, acoustique numérique et expérimentale, aéroacoustique, mécanique des fluides....

La règle d'or de la science qui consiste à tester ses idées par un recours à l'expérimentation a été suivie le plus possible. C'est une demande de l'industrie et du

monde réel. Dans les disciplines concernées, contrairement à d'autres plus théoriques, ce retour se fait rapidement en général. Peut-être serait-il bon de laisser au chercheur un peu plus de temps pour progresser suffisamment avant de passer ses idées au banc d'essai impitoyable et parfois aveugle de l'expérience ! Mais fort contenu mathématique et proximité de l'expérience, de laboratoire ou de terrain, ne sont pas nécessairement éloignés. Aujourd'hui l'ingénieur praticien en dynamique développe son raisonnement dans le domaine de Fourier. Pourtant, il y a 20 ans, certains ingénieurs 'de terrain' refusaient de 'croire' en cet outil, selon eux trop théorique et déconnecté de la réalité. On n'oubliera pas non plus qu'à l'origine la théorie modale vient de la mécanique quantique, comme d'ailleurs certains concepts de traitement du signal. Rappelons-nous le principe d'incertitude converti en inégalité d'Heisenberg-Gabor portant sur le produit BT (produit largeur de bande – durée du signal en traitement du signal). Demain sans doute d'autres méthodes suivront le même trajet de la théorie la plus abstraite à l'utilisation concrète. On voit ici la pertinence de la pensée de M. Serres au §4.1: "le formel accouche du réel".

La suite ? Ma propension toute personnelle à me porter sur des domaines nouveaux, à élargir l'horizon de mes préoccupations scientifiques, me pousse naturellement à imaginer une évolution vers des thèmes de recherche encore nouveaux pour moi. D'aucuns peuvent juger cette tendance négativement. Ne vaut-il pas mieux exploiter au mieux les sujets déjà bien parcourus, parfaitement maîtrisés, plutôt que d'en aborder de nouveau avec la naïveté du néophyte ? Je ne suis pas de ceux qui tranchent de manière définitive cette question. La réponse à lui faire me paraît plus nuancée. En effet, le 'stationnement prolongé' sur un thème donné permet certes de construire une démarche de bon niveau, et aussi, pourquoi pas, de 'bétonner un pré carré', mais il peut à long terme déboucher sur le sclérose, l'immobilisme, et, pourquoi ne pas le dire, un certain ennui préjudiciable à la créativité et à la productivité. C'est pourquoi il paraît plus raisonnable de conjuguer dans la même activité le développement des acquis et la découverte de territoires nouveaux. La culture scientifique acquise par la variété des travaux passés favorise clairement le second volet. Mes travaux passés portent les germes d'un changement de thématique: on y rencontre entre autres géophysique, biomécanique, et quantification des réponses subjectives. Le succès rencontré avec les articles dans 'Mechanics of Materials', montre pour moi le bien-fondé de l'opinion d'E. Morin: travailler dans le *no man's land* entre mathématique appliquée et physique des

matériaux s'est avéré productif, au moins en termes académiques. Il faut s'en souvenir pour les orientations futures. Quel que soit le domaine des travaux à venir, restreint ou élargi, l'HDR permettra beaucoup plus facilement et légitimement de participer à des projets ou d'en impulser de nouveaux. L'encadrement de doctorants, alors pleinement justifié, élargira les possibilités d'action scientifique et permettra de traduire plus efficacement en actes les lignes conductrices dégagées dans le présent rapport.

Selon quelles ligne directrices orienter cette action future ? On distinguera au sein des thèmes actuels ce qui relève de la demande sociétale (ou de type 'top down' pour adopter une terminologie bruxelloise !), et ce qui relève des idées personnelles (du type 'bottom up', donc). On ne manquera pas non plus de recenser quelques pistes de renouvellement thématique.

7.1 Demande sociétale

Par 'thèmes relevant de la demande sociétale', on doit entendre très concrètement les sujets où une demande d'utilisateurs potentiels est assez clairement exprimée. Dans une entreprise, on parlerait de 'demande client'. Naturellement, ceci débouche sur du 'court terme' et une démarche opportuniste. Elle a l'avantage d'être ancrée dans la réalité.

Dans le prolongement de travaux récents, on mentionnera:

- une demande d'outils d'acoustique et de vibro-acoustique numérique toujours plus performants. Cette demande, motivée par des besoins de santé au travail², mais aussi d'ingénierie des transports ou d'environnement, est naturellement très générale, et certains logiciels peuvent prétendre la satisfaire. Comme expliqué plus haut (§ 5.1), en fait la demande se décline en de multiples niches de besoins particuliers. Par exemple dans les cas nous concernant, on manque d'un moyen traitant correctement les ouvertures de structures d'épaisseur moyenne, avec couplage vibro-acoustique, en présence d'absorbant, le tout en calcul rapide par FMM. On ouvrirait alors la voie à une méthodologie innovante

² Le coût annuel des surdités professionnelles pour la Sécurité Sociale se chiffre en millions d'euros. C'est ce qui motive les travaux menés par l'INRS dans ce domaine.

d'intervention sur site des praticiens de l'acoustique industrielle. Est-ce de la recherche ? Oui dans la mesure où interviennent la question du choix de la FMM, version HF ou BF, celle du traitement précis du résonateur de Helmholtz, celle enfin du choix d'une méthode numérique robuste, précise, rapide et économe en espace mémoire de calcul du rayonnement et du couplage vibration-acoustique. Une bonne option dans de nombreuses situations – mais pas toutes, on vient de le rappeler - pourrait être de marier les surfaces minces traitées en partie finie de Hadamard et la FMM, ces deux approches étant les plus performantes du moment (déjà évoqué en 5.3 Orientations). Certes ce couple de techniques a déjà été implémenté dans un contexte de recherche ([75]), mais il s'agit ici in fine de les introduire dans un outil d'utilisation pratique, et surtout de parvenir à un couplage fluide-structure indispensable pour traiter en simulation tous les problèmes de transparence.

- on n'oubliera pas non plus la réelle demande de processus systématique de stabilisation en calcul temporel, évoquée en 3.5.3 iii.

- une demande de traitement élaboré des données de matériaux viscoélastiques linéaires. On pourrait utiliser la causalité traduite en termes de transformée de Hilbert pour prolonger en haute fréquence ou basse fréquence les courbes maîtresses. Il s'agit alors d'étendre à notre domaine mécanique des travaux déjà entrepris en d'autres domaines de la physique [76, 77]. La particularité de notre cas est encore la très grande étendue fréquentielle des courbes maîtresses. Les publications ne concernent que des bandes de fréquence relativement étroites. Une autre voie intéressante est d'intégrer la causalité comme contrainte dans une construction optimisée de ces mêmes courbes maîtresses. On devrait là adapter à nos données très particulières une idée déjà illustrée en [78].

7.2 Application d'idées personnelles

Il s'agit d'idées déjà confirmées par de premiers travaux de recherche, mais dont le 'marché' / le financement restent à trouver.

- dans le domaine de l'environnement, l'acoustique péri-urbaine (propagation du bruit en zone pavillonnaire), constitue une application prometteuse de la FMM. Le programme développé est immédiatement disponible pour traiter ce cas à diffracteurs multiples. Déjà un travail d'étudiant en PFE avait été consacré à ce sujet en 1999, mais sans disposer de l'outil FMM. On y avait abordé une modélisation de transfert radiatif qui pourrait servir ici de test dans le cas (académique) 'petits diffracteurs très nombreux' [79].

Il paraît attractif de développer le retournement temporel sur de nouvelles situations demandant une adaptation, espérant conserver ses avantages déjà observés: économie de capteurs et de calcul, très bonne résolution spatiale en milieu très perturbé:

- source impulsives en solide 3D. 2 projets étudiants exploratoires avec simulation Femlab/ Comsol ont été menés en vue d'applications industrielles telles que chocs dans boîte de vitesse. Le sujet a déjà été exploré sur le plan théorique [80].
- extension, très importante pour les applications, à des sources de bruit stationnaire [81, 82], puis à des sources quelconques en temps et fréquence.
- application à des problèmes de matériaux (localisations de cracks par exploitation de la non linéarité de la réponse [83, 84]).

Plus généralement l'union FMM – retournement temporel apparaît de manière évidente comme un terrain intéressant et peu exploré pour améliorer la puissance de localisation / l'imagerie de sources.

Logiquement on est amené à envisager d'appliquer la même démarche à la technique concurrente d'imagerie appelée IBEM (Inverse Boundary Elements Method): c'est la technique qui fait une imagerie des sources sur un corps de géométrie quelconque mais connue à partir des données sur une antenne [85, 86, 87]. L'intégration de la FMM dans un processus d'optimisation permettrait de traiter des situations de plus en plus réalistes.

7.3 Renouvellement thématique

Il s'agit plutôt d'une évolution par changement significatif de discipline. L'acquis de la FMM, dont on commence à maîtriser les concepts et la technique, permettrait de renouveler certains sujets de mécanique des matériaux.

Appliquer la FMM en matériaux composites (au sens large): l'effet collectif d'un grand nombre d'inclusions de forme et géométrie quelconque traité de manière exacte permettrait d'approfondir le lien entre micro- et macromécanique. Voir les articles [88, 89, 90] pour les principes de calcul et des tests numériques. On pourrait par exemple dans un premier temps évaluer les écarts à la loi d'homogénéisation classiques qui sont dûs:

- à un aléas, ici finement représenté, sur la position ou sur la géométrie des inclusions
- à des formes d'inclusion bi ou tridimensionnelles très spécifiques,
- à des défauts de périodicité dans un cas de réseau quasi-périodique.

Par la suite, une adaptation du calcul incluant la FMM dans une boucle temporelle pourrait permettre de modéliser la propagation de fissures dans un tel milieu.

Bien d'autres idées de recherche sont envisageables, certaines sont déjà mises en œuvre. Leur devenir dépendra beaucoup des moyens humains et pratiques mobilisables. Il y a très peu de 'bons' sujets de recherche dans l'absolu, il y a plus fréquemment des projets qui selon la personnalité des individus, les moyens mis en œuvre, la qualité du dialogue entre intervenants, la qualité de l'environnement et l'enthousiasme des participants, peuvent décevoir les espoirs mis en eux, ou au contraire se révéler fructueux à court terme et porteurs d'avenir à long terme.

ANNEXES

Annexe 1 : Choix d'articles

Des 4 articles retenus, les deux premiers s'inscrivent dans le contexte de l'acoustique numérique, le premier en formulation fréquentielle (thèse de F. Polonio), le second en formulation temporelle. Les deux suivants relèvent du traitement des mesures, le premier en acoustique, le second dans le domaine des matériaux.

Acoustic Radiation of an Open Structure: Modeling and Experiments

Franck Polonio, Thierry Loyau

Institut National de Recherche et de Sécurité, BP27, 54501 Vandoeuvre, France. thierry.loyau@inrs.fr

Jean-Marc Parot, Grigore Gogu

Laboratoire de Recherches et Applications en Mécanique Avancée, Institut Français de Mécanique Avancée et Université Blaise Pascal, BP265, Campus de Clermont/les Cézeaux 63175, Aubière, France. parot@ifma.fr, gogu@ifma.fr

Summary

This paper examines how to solve numerically the radiation of a vibrating structure with apertures / openings through walls of any thickness. The interior and exterior acoustic domains are modelled separately using a boundary element approach. They are linked by a continuity condition of the pressure and the velocity through the opening. The numerical computation provides the pressure on the internal and external walls of the structure, and the acoustic velocity at the opening. The radiated acoustic pressure at any given point, inside or outside the structure, is obtained by the Helmholtz integral formula. A numerical and experimental validation is presented. This results in favorable conclusions concerning the ability of the model to compute correctly the acoustic radiation of a thin or moderately thick structure. After the validation, several examples are processed using the model, some of which take into account an absorbing blanket within the structure.

PACS no. 43.20.Tb, 43.50.Gf

1. Introduction

Among the techniques for reducing machinery noise, partial casing and enclosures are still widely used. This kind of structure has a relatively simple shape, and is generally made of plate assemblies. It is often excited mechanically and / or acoustically by means of internal sources. It comprises a number of functional apertures to bring parts, to allow a shaft for cooling the internal components, etc. (see Figure 1). The walls of the open cavity are generally blanketed with an absorbing material.

It is at low frequencies that the design of the casing is most critical. Indeed, the insertion loss of the panels is low and the efficiency of absorbant material is low. The internal acoustic cavity is very important, particularly because of the amplification due to Helmholtz resonance. As described in this paper, the sound radiation of these casings cannot be computed in closed form, and numerical methods are therefore necessary.

The thickness of industrial structures is not as thin as that of cars: a steel sheet several millimeters in thickness is blanketed with an acoustic material. Let us call them 'moderately thick structures'. Typically their thickness, e , satisfies:

$$L/200 < e < \lambda/4,$$

Received 18 December 2002,
accepted 4 November 2003.

where L is the characteristic dimension of the structure and λ the acoustic wavelength. Closed structures have been the subject of a great deal of work, but it would appear that open thick structures have only resulted in a few papers. Several approaches have however been identified.

The first approach (termed option 3 in Tables I and II) assumes that the entire casing of the structure is immersed in a fluid. The acoustic pressure is computed by a boundary element method (BEM). A single mesh covers the structure. The interior and exterior domains are not separated [1]. This method has a number of drawbacks: the computing times are high because the integrals have to be computed by taking into account all the interactions between elements of the interior and exterior skin of the open structure. Moreover, certain numerical errors arise when integrating the Green function if the walls of the structure are thin. It is generally assumed that the numerical errors are too high when the thickness of the structure is less than the width of the element, which is itself at most about $\lambda/4$ (λ is the acoustic wavelength). This method is efficient for thick structures, but has not been optimized for thin or moderately thick structures.

A second approach (option 1 in the Tables I and II) consists in solving the problem by a pressure discontinuity integral equation method in the frequency [2] or in the time domain [3]. This method allows us to solve both interior and exterior boundary problems by taking the pressure difference between internal and external surfaces as the unknown. In this case, it is necessary to use the distribution

Table I. Characteristics of the three methods.




	Option 1	Option 2	Option 3
Acoustic elements	Thin elements, zero thickness	Two meshes, coupled at the opening	Only one mesh, massive body
Outlines			
Validity domain	$e < L/200$	$L/200 < e < \lambda/4$	$\lambda/4 < e$

Table II. Domain of validity of the three methods.

Option 1	Well fitted	Modelling errors	Modelling errors
Option 2	Unnecessarily expensive	Well fitted	Unnecessarily expensive
Option 3	Inefficient and expensive algorithm	Inefficient and expensive algorithm	Well fitted
Validity domain	$e < L/200$	$L/200 < e < \lambda/4$	$\lambda/4 < e$

theory, because the acoustic pressure has first order discontinuities when crossing the walls of the structure. It is generally assumed that the pressure discontinuity method is efficient for a structure whose wall thickness is less than $L/200$, where L is the characteristic length of the structure. This value of $L/200$ is a result of the following reasoning: the thin structure element is close to reality as the thickness e is small enough compared to the width of the element D_x . Let us set this limit at $D_x/4$:

$$e < D_x/4.$$

A reasonable numerical computation on the computers available for this type of industrial application uses a maximum of 10,000 elements. A very crude evaluation of the triangular element number on a uniformly meshed sphere with a diameter L leads to

$$D_x = L/50,$$

and therefore the validity condition of the model:

$$e < L/200.$$

G. Elias and P. Malbécui [4] gave an interesting comparison between analytical and numerical solutions to the open sphere problem. The sphere allows the analytical (but involved) processing using spherical Bessel functions and Legendre polynomials. The numerical solution was based on the pressure discontinuity integral equation, following the Hamdi approach [5]. The pressure discontinuity method is efficient for thin structures, but does not allow the processing of thick or moderately thick structures.

A. F. Seybert [6] suggests a solution for solving the acoustic problem of coupling between the exterior and interior of an open structure. The boundary problem is expressed by two integral equations. One is valid in the interior domain, the other in the exterior domain. Both equations are linked by the acoustic pressure and velocity continuity conditions at the opening.

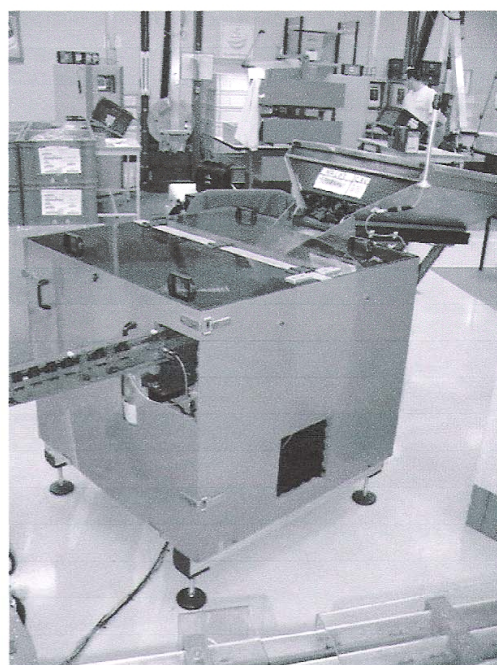


Figure 1. A typical machine.

Holland and Fahy proceed in the same way [7], but they solve the equation system iteratively. Their method is approximated. It solves the coupled system with the aid of a Neuman expansion. The interior acoustic pressure is computed by boundary elements, and the acoustic radiation is computed in the same way or by using a Rayleigh integral. Both domains are coupled by the impedance of the opening. An acoustic velocity is chosen as the initial data. The exterior BEM computes the pressure. With this pressure at the opening, the interior BEM computes an interior veloc-

ity at the opening. This process is repeated, and converges quickly. We have retained this technique as a different way to solve the Seybert's formulation [6]. Seybert tested another method way: the interior model using finite elements and the exterior model using boundary elements [8]. It is indeed possible, but demands a volume mesh tool. The method developed by Seybert in [6] (option 2 in Tables I and II) seems the most suitable for processing casings, as described above. The splitting into two domains allows the use of two independent meshes, one for each acoustic domain. The method is therefore intrinsically valid for structures of any thickness [9, 10].

Tables I and II summarize the characteristics and the domain of validity of the existing methods in relation to the thickness of the structure e .

In parts 2 and 3, the interior and exterior Helmholtz formulae are rewritten and extended to situations where the structure is thick and has several openings. The structure can be excited either by a mechanical force or by an internal acoustic source. The interior of the cavity may be fully or partially lined with an absorbing material.

In the third part, we present a numerical comparison with a pressure discontinuity method, as applied to a thin walled structure. The structure is a rectangular box under mechanical excitation.

In part 4, there is an experimental validation of the method on a moderately thick rectangular structure with one aperture under mechanical excitation.

Finally, in the last part, we run the model. The vibro-acoustic behaviour of the structure is illustrated with acoustic pressure and active intensity maps. An analysis of the effect of opening number, aperture size, and an absorbing blanket made of a rockwool-type material is carried out.

2. Acoustic radiation model for a moderately thick structure

In this part, the acoustic radiation of an open structure with moderately thick walls is modeled; and the structure is excited by a mechanical force. The surface velocity at every point of the structure can be ascertained by measurement or by means of a software package. Consequently, there is no coupling between cavity and structure modes. An acoustic internal point source may be set inside the interior domain (see §2.3.1), but it will not be used in the following computations, with the exception of one referenced in appendix A. The internal walls may be lined with absorbing materials.

The assumption of no coupling between cavity and structure modes is questionable; it is certainly spurious when the structure is light. With moderately thick structures like ours, we retain this assumption because of the approximate a priori evaluations (see Appendix A1) and because of the fit between the coupled and non coupled computations reported in §4 (Figure 6 and Figure 7). This fit is not perfect, but sufficient for the purpose of first design and comparisons between noise reduction solutions.

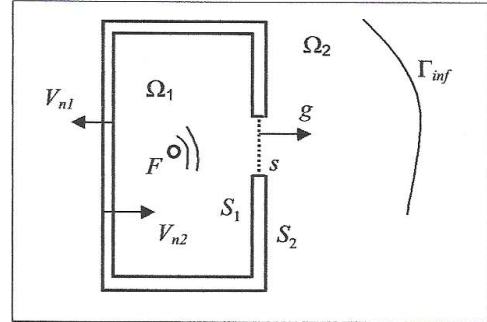


Figure 2. Configuration for computing the acoustic radiation. Open vibrating structure with internal acoustic source.

2.1. Model and problem formulation

The partial differential equations in both domains are established from the Helmholtz's equation. The situation is shown in Figure 2.

p is the acoustic pressure, k is a given wave number, F is an acoustic source at a given point, V_n is a given wall velocity, g is the unknown velocity at the opening.

Interior domain:

$$\begin{cases} \Delta p_1 + k^2 p_1 = F & \text{in } \Omega_1, \\ \partial_{n_1} p_1 = -i\omega\rho V_{n_1} & \text{on } S_1, \\ \partial_{n_1} p_1 = i\omega\rho g & \text{on } s. \end{cases} \quad (1)$$

Exterior domain:

$$\begin{cases} \Delta p_2 + k^2 p_2 = 0 & \text{in } \Omega_2, \\ \partial_{n_2} p_2 = -i\omega\rho V_{n_2} & \text{on } S_2, \\ \partial_{n_2} p_2 = i\omega\rho g & \text{on } s, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} + ik \right) p_2 = 0 & \text{on } \Gamma_{\text{inf}}. \end{cases} \quad (2)$$

Opening condition:

$$p_2 = p_1 \quad \text{on } s. \quad (3)$$

2.2. Absorbing material

The wall surface is assumed to be only slightly curved. It can therefore be equated with its tangent plane $z = -\varepsilon$. (Figure 3).

It moves with velocity V_0 along the normal z axis, and is covered, in the domain $(-\varepsilon, 0)$ with a resistive material; the material is characterized by its impedance Z , which is, in the Fourier domain, the ratio of pressure $p(0)$, effect of the fluid $z > 0$ on the surface $z = 0$ to the side-to-side velocity variation, $V_0 - V(0)$. $V(0)$ is the velocity of the interface fluid / material in $z = 0$ [11]:

$$Z = \frac{p(0)}{V_0 - V(0)}. \quad (4)$$

Using the Euler equation outside the sources, after Fourier transform, we obtain $V(0)$ as:

$$V(0) = \frac{\partial p / \partial z}{i\omega\rho} = \frac{-\partial p / \partial n}{i\omega\rho}. \quad (5)$$

\vec{n} is the external normal to the domain, $z > 0$. The equation defining the material impedance Z becomes:

$$\frac{\partial p}{\partial n} + ik\beta p = -i\omega\rho V_0 \quad \text{at } z = 0, \quad (6)$$

where $\beta = \rho c / Z$ is the normalized material admittance.

In the following, this form will be used for (6):

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -i\omega\rho V_0 - i\omega\rho p / Z. \quad (7)$$

Using the preceding results, we obtain the system of partial differential equations to be solved in both domains, as in 2.1. The situation is shown in Figure 4.

p is the acoustic pressure, k is a given wave number, F is an point acoustic source, V_n is a given wall velocity, Z is the material acoustic impedance.

Interior domain:

$$\begin{cases} \Delta p_1 + k^2 p_1 = F & \text{in } \Omega_1, \\ \partial_{n_1} p_1 + i\omega\rho p_1 / Z = -i\omega\rho V_{n_1} & \text{on } S_1, \\ \partial_{n_1} p_1 = i\omega\rho g & \text{on } s. \end{cases} \quad (8)$$

Exterior domain:

$$\begin{cases} \Delta p_2 + k^2 p_2 = 0 & \text{in } \Omega_2, \\ \partial_{n_2} p_2 = -i\omega\rho V_{n_2} & \text{on } S_2, \\ \partial_{n_2} p_2 = i\omega\rho g & \text{on } s, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial}{\partial r} + ik \right) p_2 = 0 & \text{on } \Gamma_{\text{inf}}. \end{cases} \quad (9)$$

Opening condition:

$$p_2 = p_1 \quad \text{on } s. \quad (10)$$

To take into account a reflecting ground, the acoustic pressure at an exterior point is computed by adding the acoustic pressure at this point to the acoustic pressure at the symmetrical point compared to the plane modeling the reflecting ground. In this way, we ignore the interaction between the body and its image. This is allowed if the ratio of the distance to the dimension of the source object is high enough.

2.3. Formulating the coupled interior-exterior integral equation

The partial differential equations (8)–(9) are rewritten as two integral equations, one for the interior domain, the other for the exterior domain.

2.3.1. Formulating the interior integral

The acoustic pressure on the internal surface is solved using the following integral equation:

$$\frac{1}{2} p_1(x') = \int_{S_1+s} (p_1 \partial_n G - G \partial_n p_1) dS, \quad (11)$$

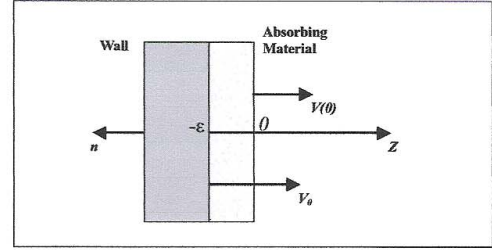


Figure 3. Modelling the boundary conditions: absorbing material on the internal surface of the wall.

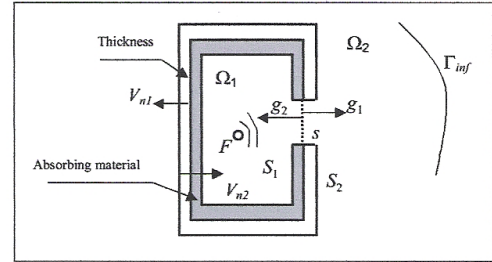


Figure 4. Configuration to compute the acoustic radiation of a vibrating open structure under mechanical excitation, with acoustic internal lining and internal source.

where G is the Green function

$$G(x', x) = \frac{e^{-i|x' - x|}}{4\pi|x' - x|}.$$

$R = |x' - x|$ is the distance between point Q (moving on the boundary surface) with coordinates x' and a fixed point P with coordinates x on the same boundary surface.

The equation modeling the interior acoustic pressure is obtained by using the boundary conditions in (8). The point source is modeled using the Dirac function $F = \delta$.

When transformed, (11) becomes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} p_1(x') - \int_{S_1+s} p_1(x) \partial_{n_1} G(x, x') d(S_1 + s) \\ - i\omega\rho \int_{S_1} \frac{p_1(x)}{Z_{n_1}} G(x, x') dS_1 - i\omega\rho \int_s g G(x, x') ds \\ = -i\omega\rho \int_{S_1} V_{n_1} G(x, x') dS_1 + \int_{\Omega_1} \delta G(x, x') d\Omega_1 \end{aligned} \quad (12)$$

$\forall x' \in (S_1 + s).$

2.3.2. Formulating the exterior integral formulation

The acoustic external pressure satisfies the following integral equation:

$$\frac{1}{2} p_2(x') = \int_{S_2+s} (p_2 \partial_{n_2} G - G \partial_{n_2} p_2) dS. \quad (13)$$

The equation for the external surface acoustic pressure is obtained by using the boundary conditions in (9). Equation (13), when transformed, becomes

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}p_2(x') - \int_{S_2+s} p_2(x)\partial_{n_2}G(x, x') d(S_2 + s) \\ + i\omega\rho \int_s gG(x, x') ds \\ = -i\omega\rho \int_s V_{n_2}G(x, x') dS_2 \quad \forall x' \in (S_2 + s). \end{aligned} \quad (14)$$

3. Numerical implementation

Equations (10), (12), (14) are then discretized.

3.1. Discretization

A collocation method [12] is used to discretize equations (12) and (14). The unknowns p_1 and g are taken as constant on every element of the interior surface. The opening s is meshed with N_0 elements, and the internal surface of the structure is meshed with N_{S_1} elements. The total number of elements on the interior surface is N_1 ,

$$N_1 = N_0 + N_{S_1}.$$

This process is widely documented in the literature.

Likewise, on the exterior surface, there are N_0 elements at the opening (common with the interior), and N_{S_2} elements on the external surface of the structure.

After reorganization, we obtain two groups of equations, each corresponding to one surface integral equation:

$$\sum_{j=1}^{N_1} A_{ij}p_{1j} + \sum_{j=1}^{N_0} B_{ij}g_j = f_{1i}, \quad i = 1, \dots, N_1, \quad (15)$$

$$\sum_{j=1}^{N_2} C_{ij}p_{2j} + \sum_{j=1}^{N_0} D_{ij}g_j = f_{2i}, \quad i = 1, \dots, N_2. \quad (16)$$

The diagonal elements ($i = j$) require special processing of the integrals (Appendix A2).

To discretize equation (10) (pressure continuity at the opening), two linear mappings are used: R_1 and R_2 , named 'restriction' mappings. They restrict the identity mapping on each surface to the aperture. The continuity condition (10) becomes

$$R_1p_1 - R_2p_2 = 0. \quad (17)$$

3.2. Solving method

Equations (15), (16) and (17) can be written as a linear system:

$$\begin{bmatrix} A & 0 & B \\ c & C & D \\ R_1 & -R_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

After the equations are solved, this system yields the internal pressure, the external pressure, and the acoustic velocity at the opening. The matrix (18) is square; it is also

non-symmetric, sparse and large. With these features, we are required to employ an iterative method (due to the large dimensions), and an algorithm that does not take into account the zeros. For these reasons, we use the conjugate bi-gradient method for sparse matrices [13].

The conjugate bi-gradient method extends the conjugate gradient method to non-symmetric and non-positive matrices [14]. The computing converges after a maximum of N steps, N being the matrix size. The non-zero entries of the matrix are stored in two arrays.

No precaution is taken concerning the "irregular frequencies". This well-known drawback of the integral formula of the exterior problem is discussed in [12]. At certain frequencies, non physical resonant solutions to an associated interior problem interfere with the solution to the linear system. Due to the coupling between the interior and exterior boundary integral equations through the opening, the interior domain is the volume of the structure, with the thickness less than one centimeter. The interior resonances have a very low density due to the cramped volume. This is the reason we did not encounter this problem, with the possible exception of frequencies 460 Hz in Figure 7 and 610 Hz in Figure 15. The extent of the problem is limited and, like the authors of [15], we are inclined to ignore it. It is however clearly possible due to the low-frequency domain.

3.3. Acoustic radiation

After computing p_1 , p_2 and g , it is possible to obtain the acoustic radiation at any internal or external point of the structure using well-documented formulas:

$$\begin{aligned} p_1(y) = \int_{S_1+s} p_1(x)\partial_{n_1}G(x, y) d(S_1 + s) \\ + i\omega\rho \int_{S_1} \frac{p_1(x)}{Z_{n_1}}G(x, y) dS_1 \\ + i\omega\rho \int_s g(x)G(x, y) ds \\ - i\omega\rho \int_{S_1} V_{n_1}G(x, y) dS_1 + G(x_0, y) \\ \forall x' \in (S_1 + s), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} p_2(y) = \int_{S_2+s} p_2(x)\partial_{n_2}G(x, y) d(S_2 + s) \\ - i\omega\rho \int_s g(x)G(x, y) ds \\ - i\omega\rho \int_{S_2} V_{n_2}G(x, y) dS_2 \\ \forall x' \in (S_2 + s). \end{aligned} \quad (20)$$

This yields the Bemhole computing code.

4. Numerical validation

In this part, we demonstrate the validation of the Bemhole computing code on a rectangular open box. The external dimensions of the box are $0.4 \times 0.5 \times 0.6 \text{ m}^3$. It is made of

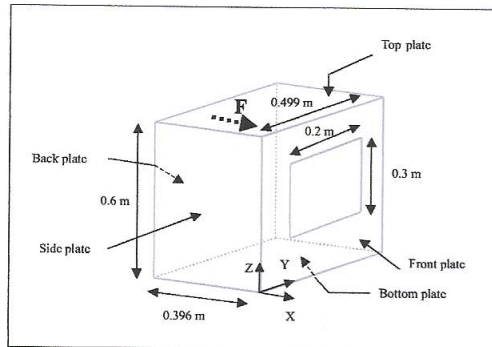


Figure 5. Sketch of the open box. Thin wall, mechanical excitation.

6 aluminum plates. The front plate includes a $0.2 \times 0.3 \text{ m}^2$ central aperture. The other plates are lined with a damping material. The distance from the box to the reflecting ground is 1.285 m. A mechanical force is applied perpendicular to the back plate (Figure 5). Notwithstanding the 6 mm thickness of the structure, the radiation is computed using the assumption of a thin-walled structure. It is therefore possible to make a comparison with the I-deas Vibro-Acoustics software, which uses a pressure discontinuity method, valid only for thin-walled structures. The aim at this stage is simply to compare numerical results.

The sound velocity referred to throughout this paper is 340 m/s.

4.1. The computing parameters used by I-Deas Vibro-Acoustics

The numerical model of the structure is composed of 7545 nodes (45270 d.o.f.) and 7516 elements. The structural damping is 0.5%. In the numerical model, the damping material is taken into account through its mass. This is why the specific mass is modified as follows:

- Back plate: $2700 \text{ kg/m}^3 \rightarrow 3997 \text{ kg/m}^3$,
- Side plates: $2700 \text{ kg/m}^3 \rightarrow 3963 \text{ kg/m}^3$,
- Top and bottom plates: $2700 \text{ kg/m}^3 \rightarrow 4117 \text{ kg/m}^3$.

The 'in vacuo' structural modes are computed using the 'Model Solution' module from the I-Deas Master SeriesTM 8 software developed by SDRC. The 'Vibro-Acoustics' module is used to compute the vibration and the vibro-acoustic response of the box.

The structural modal basis includes 73 modes in the [0–1000 Hz] frequency band. The box is coupled to the air by only one boundary element mesh (discontinuity method). The mesh is composed of 491 nodes and 486 elements. The vibro-acoustic model of the box is completed by a perfectly rigid plane located 1.285 m under the box.

The excitation is a mechanical force, which is applied perpendicular to the back plate, on a structural mesh node. The amplitude of the harmonic force is 1 N.

4.2. The computing parameters used by the Bemhole program

The input data of the Bemhole computing code are the vibration velocities as computed by the Samcef finite element software. The computing parameters used by the Samcef software are the following:

- The numerical model of the structure includes 568 nodes and 568 elements (one node in the middle of each element).
- The entire structure is damped with a viscous-like damping of 0.5%.
- The type of coupling between plates is chosen so that an angle of 90° is maintained in the corners.

The Bemhole computing code does not take the fluid-structure coupling into account. The acoustic mesh used by the Bemhole computing code is a boundary element mesh including an exterior and an interior domain. The mesh of each domain is composed of 592 nodes and 592 elements. A perfectly rigid plane located at 1.285 m under the box completes the acoustic model of the box.

After computation by I-Deas Vibro-Acoustics and by Samcef, the structural modal frequencies are compared. The goal is to ensure a good fit when taking the matching conditions between plates into account. The discrepancies observed on the various modal frequencies are due to the smaller number of elements used for the Samcef structural mesh (Table III).

The acoustic pressures, as computed using I-Deas Vibro-Acoustics and by Bemhole, were compared at a point located 3 m from the front of the aperture (Figure 6). The frequency band studied was [20–600 Hz].

A good fit between the computed acoustic pressures was noted. The first peak at 91 Hz agrees with the Helmholtz resonator frequency. This acoustic mode is a characteristic of open structure radiation. It is coupled with the first structural mode at 112 Hz. The coupling explains the differences in level for this resonance. The discrepancies observed above 400 Hz can be explained by the modal frequency shift between the finite element Samcef software and the I-Deas Vibro-Acoustics software, as shown in Table III.

Another comparison of the two software packages was carried out using the radiated power spectrum. In the Bemhole program, the pressure field P_r was computed on a sphere with a radius of 10 m located at the centre of the box. The acoustic power was then computed with this formula [2]:

$$P_{ow} = \int_S \frac{P_r^2}{2\rho c} dS. \quad (21)$$

The comparison (Figure 7) is still very good in the band where the modal frequencies from both software packages agree, with only the coupling problem for the Helmholtz resonator, and with the exception of the I-Deas peak at 360 Hz. It may be due to structure mode no. 15 being shifted and amplified by acoustic coupling. But an irregular frequency cannot be excluded.

Table III. Modal frequency comparison between I-Deas and Samcef.

Mode	Samcef, Hz	I-Deas, Hz
1	112.2	112.2
2	156.6	156.9
3	163.9	164.7
4	170.8	171.6
5	179.0	179.0
6	231.8	231.6
7	239.9	239.7
8	263.6	262.9
9	265.7	264.0
10	266.7	269.4
11	291.1	291.8
12	310.7	310.1
13	327.9	323.2
14	333.7	330.5
15	366.8	367.4
16	382.3	378.9
17	402.1	402.6
18	426.8	422.3
19	440.5	437.7
20	444.0	446.1
21	449.0	446.8
22	450.2	447.9
23	458.7	452.8
24	496.3	496.7
25	517.8	507.9
26	532.6	522.6
27	537.0	526.4
28	560.7	553.6
29	561.1	561.9
30	590.9	578.3
31	596.2	582.0
32	598.7	587.8

5. Experimental validation

In this part, we aim to validate the Bemhole computing code in relation to velocity measurements on a rectangular open box. The aperture is rectangular. The structure is moderately thick. The velocities take the coupling between structure and cavity into account. The box was located in a semi-anechoic room. After describing the structure and its vibrational behavior, the measurement device is presented. Various results are then shown, the aim being to allow a complete validation of the method. The acoustic pressure at an external point and the acoustic radiated power are computed and compared to the measurements. We analyze the differences between the computed and experimental results.

5.1. Experimental device

The structure studied was a $0.6 \times 0.499 \times 0.396 \text{ m}^3$ box, the largest plate of which is removable, and included a $0.2 \times 0.3 \text{ m}^2$ aperture in the centre. The internal volume was 0.11 m^3 : Figure 5. The plates were made of aluminum

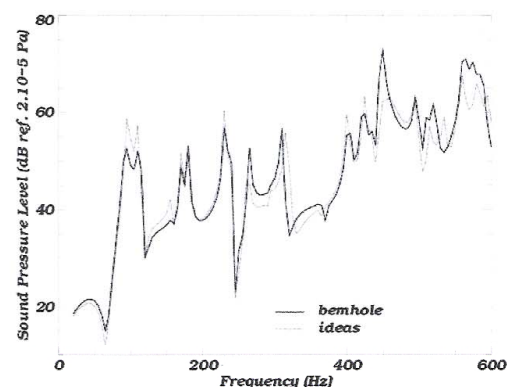


Figure 6. Bemhole and I-Deas results: Sound pressure level at an external point located 3 m in front of the aperture, in the [20–600 Hz] frequency band.

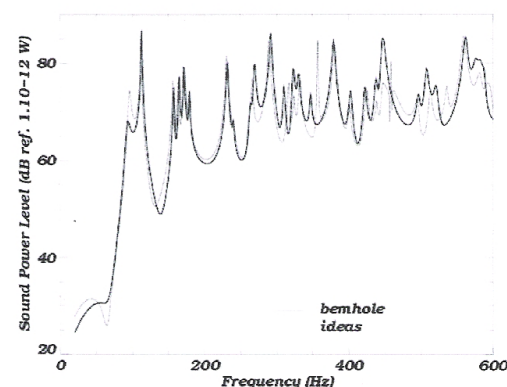


Figure 7. Bemhole and I-Deas results: Sound power level in the [20–600 Hz] frequency band.

and are 6 mm thick. This thickness was chosen for these reasons:

- The mode number in the frequency band studied must be limited. There are 26 structural modes between 0 and 500 Hz.
- A 6 mm thickness is in relation to industrial structures.
- A 6 mm thickness agrees with a 'moderate thickness', according to the criterion given below:

$$L/200 < e < \lambda/4.$$

The aluminum (AU3G) has the following characteristics: Young modulus: 69 GPa, specific mass: $2,700 \text{ kg/m}^3$. The removable plate was fitted by means of screws. The other plates were welded together, but without added material supply (electric welding).

The internal walls of the box were blanketed with sheets of a heavy viscoelastic material to increase structural

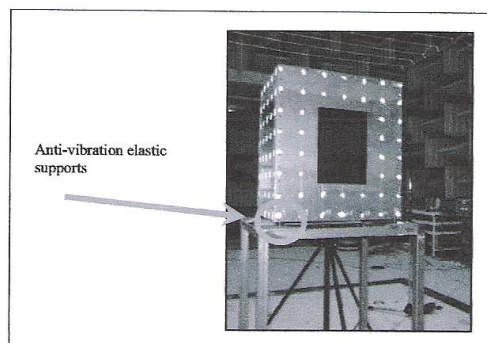


Figure 8. Experimental device: aluminum open box.

damping. This damping material covered all the plates, with the exception of the removable plate. The damped surface was 1.18 m^2 , equivalent to 88% of the entire internal area. The additional material was 3.5 mm thick and had a specific mass of 8 kg/m^2 . Its effect on rigidity was unknown, as was its absorption characteristic. The additional masses were the following:

- Back plate $0.6 \times 0.499 \text{ m}^2$: 2.330 kg,
- Side plates $0.6 \times 0.396 \text{ m}^2$: 1.800 kg,
- Top and bottom plates $0.499 \times 0.396 \text{ m}^2$: 1.680 kg.

The whole mass of the damped box was 33 kg.

The box sat on elastic supports. See Figure 8. In this assembly, the suspension frequencies were lower than 14.7 Hz. This maximum frequency corresponded to the vertical rotation of the box.

The box was located in a semi-anechoic room. The open plate was in a plane perpendicular to the ground. Moreover, the center of the box is situated at a distance of 1.285 m from the reflecting ground.

The mechanical excitation was applied with a B&K 4809 electrodynamic exciter on the back plate at the point with coordinates:

$$x = -0.396 \text{ m}, y = 0.399 \text{ m}, z = 0.4 \text{ m}.$$

The injected force was measured with a B&K 8001 impedance head. A stinger was inserted between the impedance head and the exciter. The exciter was kept closed in a box full of rockwool in order to soundproof it from the box. The exciter was suspended on elastic supports. Preliminary measurements showed that the exciter did not modify the structural vibrations in the frequency band under study.

The excitation signal was broad band noise in the [0–2000 Hz] frequency band. The force signal from the impedance head was used as a phase reference. The acoustic pressure and vibration measurements were made with the LMS signal processing device equipped with a front end VXI. The analyzed band was [0–2048 Hz], with a 1 Hz frequency resolution. The acoustic power measurement system was '01 dB', with a 1.56 Hz frequency res-

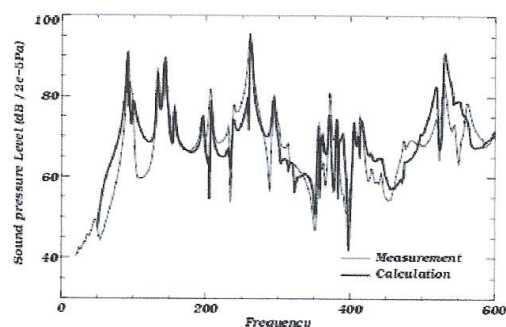


Figure 9. Pressure spectra 5 cm from the right-hand side plate.

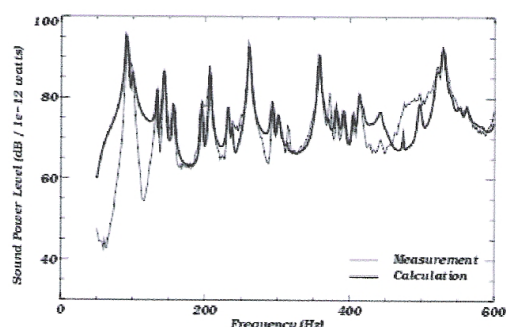


Figure 10. Computed and measured acoustic power.

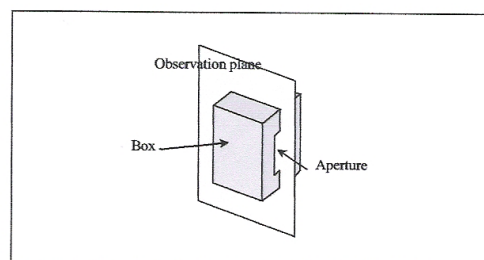


Figure 11. Observation plane used for mapping acoustic pressure and active acoustic intensity.

olution. The velocities were measured on a grid of points (white marks on Figure 8). The mean space between points was about 0.09 m.

5.2. Computing-measurements comparison for a moderately thick structure

The characteristic length of the structure is 0.88 m, and its walls are 9.5 mm thick. The criterion ' $L/200 < e < \lambda/4$ ' shows that the thin wall hypothesis would only be valid for a thickness of less than 4 mm. Similarly, the thick wall hypothesis would only be valid for very high frequencies, and is therefore unsuitable for the low frequencies consid-

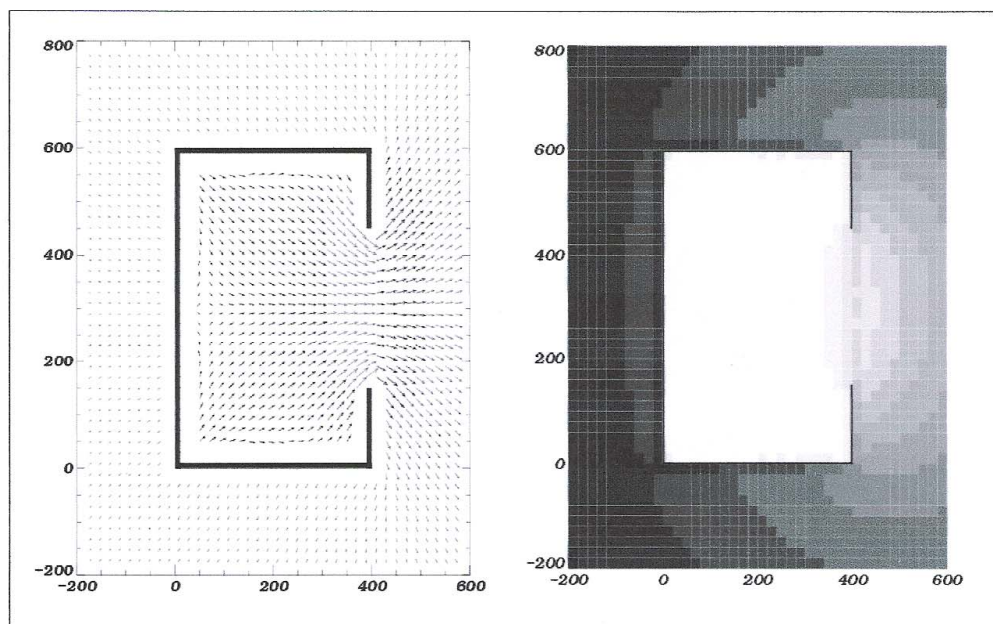


Figure 12. Acoustic pressure and active acoustic intensity at the Helmholtz resonator, frequency $f = 91$ Hz. The greyscales vary from $l_p < 140$ (black) to $160.0 < l_p < 162.5$ (light grey) in steps of 2.5.

ered in this study. Therefore, our method is the only one adapted to the acoustic radiation calculation of an open structure with a characteristic length of 0.88 m and a wall thickness of 9.5 mm.

Figure 9 shows the computed and measured acoustic pressures situated 5 cm in front of the right side plate. This point is in the acoustic near field.

The first peak corresponds to the Helmholtz resonator (91 Hz). The computed frequency is correct, but the computed pressure level is lower than that measured. Above 400 Hz, some discrepancies can be seen between the pressure spectrum computed and that measured. From this frequency onwards, the structural modes are not well sampled by the vibratory measurement mesh, which is too crude. The limits of the experimental mesh are reached.

The radiated acoustic power of the box was computed and measured. It was computed by integrating the acoustic pressure on a sphere with a 10 m radius around the box. The acoustic power was measured by scanning intensimetry, in accordance with standard NF S 31-025, with a measurement system and '01 dB' software. The distance between the microphones of the intensity probe (GRAS brand) was 50 mm, and their gain was 0.024 V/Pa. The active acoustic intensity was measured successively on the five measurement planes surrounding the box.

Figure 10 shows the computed and measured radiated acoustic powers in the [40–600 Hz] frequency band.

Both results compare very well below 400 Hz. Above 400 Hz, once again, the vibration measurement mesh is too

loose for correct processing of the higher order modes. In this case, measurement and computing fit together better than in the case of pressure (Figure 9). Generally speaking, it is assumed that acoustic power is a more robust variable than pressure at a fixed point. Here again, we encounter another example of this apparently usual fact [16]. In the pressure comparison, some experimental perturbations were suspected.

This hypothesis is proved right by the observation that the directivities measured show non-realistic random oscillations superimposed on a smooth base line.

6. Running the model

In the preceding part, we came to a favorable conclusion concerning validation of the Bemhole code. We shall now give some examples of using the model.

The structure under study was a rectangular open box. Its walls were 9.5 mm thick. The external dimensions of the box were $0.4 \times 0.5 \times 0.6$ m³. The front plate (0.5×0.6 m²) included a 0.2×0.3 m² aperture in the centre. A mechanical force was applied perpendicular to the back plate at the point with the following coordinates

$$x = -0.396 \text{ m}, y = 0.399 \text{ m}, z = 0.4 \text{ m}.$$

The Samcef software supplies the vibratory velocities. As an example of the vibro-acoustic behavior of the system, we give pressure and active intensity maps

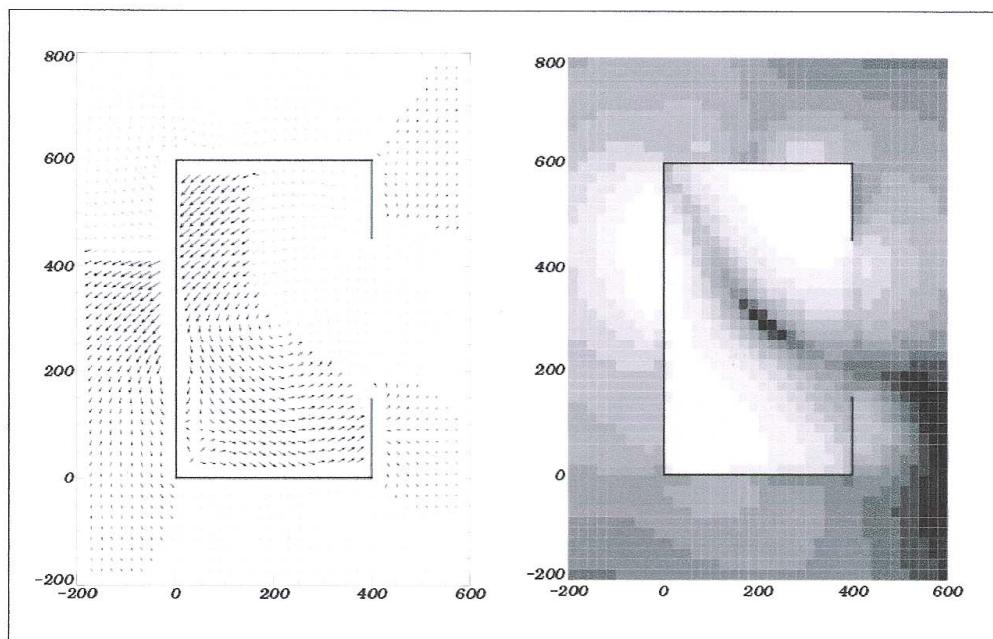


Figure 13. Acoustic pressure and active acoustic intensity at frequency $f = 354$ Hz. The greyscales vary from $lp < 45$ (black) to $70.0 < lp$ (light grey) in steps of 2.5.

[17, 18, 19] on a plane, see Figure 11, which is perpendicular to the aperture plane: Figures 12 to 14.

Grey and black arrows correspond to the sign of the intensity vector component, which is perpendicular to the plane.

At 91 Hz (Figure 12), Helmholtz resonance can be identified. Despite the fact that we ignored the coupling, our maps are of interest. They give an image of the pressure and intensity fields. This image corresponds to the first step of an iterative computing process. With a heavier structure having the same number of modes, it would be exactly the solution. At 354 Hz, there is no resonance (Figure 13). We see clearly the influence of the excitation, with its near field effect. In contrast to other frequencies, a very small intensity flows through the opening. At 561 Hz, the symmetry of a modal form can be found (Figure 14).

6.1. Influence of the size of the opening

In this part, we analyze the influence of the size of the opening, for a given volume of the box. For the sake of clarity, the vibration velocity is maintained uniform at 1 m/s. The structure is a box with external dimensions of $0.4 \times 0.5 \times 0.6 \text{ m}^3$ and 9.5 mm thick walls. The different openings are in the centre of the $0.5 \times 0.6 \text{ m}^2$ plate. We have drawn on the same diagram the pressure spectra at a point 3 m in front of the aperture (Figure 15).

Three different sizes of aperture are considered: $0.05 \times 0.1 \text{ m}^2$, $0.2 \times 0.3 \text{ m}^2$ and $0.5 \times 0.6 \text{ m}^2$ (the entire plate

is removed). The frequency of the Helmholtz resonator increases when the aperture size increases. Moreover, the damping coefficient (evaluated as $\delta f / 2f$, where δf is the bandwidth at -3 dB under the peak) increases in relation to the size of the opening. These observations agree with our knowledge of the Helmholtz resonator.

6.2. Influence of the number of openings

In this section, a number of computing results are presented, including acoustic pressure and active acoustic intensity maps when the structure comprises several openings. The maps are in the plane perpendicular to the opening plane, as shown Figure 11. The same box as in 6.1 is used, but the $0.5 \times 0.6 \text{ m}^2$ plate has two openings with a surface area of $0.2 \times 0.15 \text{ m}^2$. The uniform vibration velocity is still 1 m/s. Figures 16 and 17 show the results at 91 Hz and 561 Hz. The frequencies chosen are acoustic resonance frequencies. They show two different vibro-acoustic behaviors of the openings.

At 91 Hz, the Helmholtz resonator can be identified. Its frequency is the frequency of the casing with only one opening of the same area. A strong intensity flows across the openings. At 561 Hz, a cavity mode is excited. It is the (0,0,2) mode with two nodal planes. The acoustic pressure nodes correspond to the openings, and the acoustic radiation through the apertures is low.

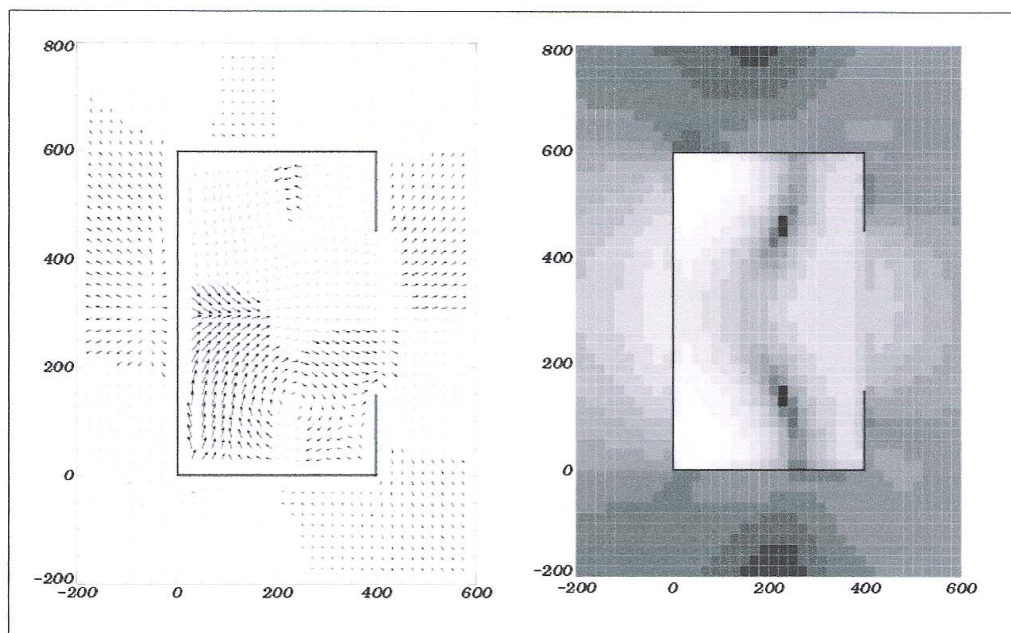


Figure 14. Acoustic pressure and active acoustic intensity at frequency $f = 561$ Hz. The greyscales vary from $lp < 75$ (black) to $105.0 < lp$ (light grey) in steps of 2.5.

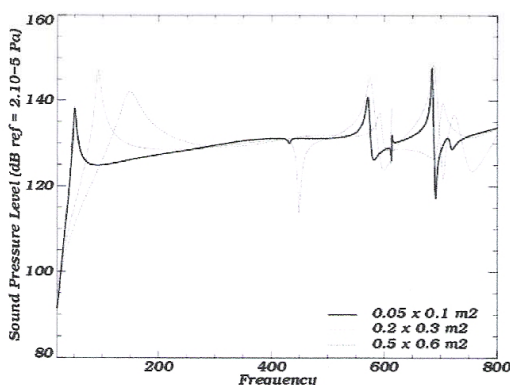


Figure 15. Acoustic pressure 3 m in front of the aperture for 3 different opening sizes.

6.3. Acoustic radiation of a moderately thick open structure, with absorbing material on interior walls, under mechanical excitation

The first task is to determine the normal acoustic impedance of a porous material. The Delany and Basley [20], Mechel [21], Attenborough [22] models result in satisfying results. Among these models, we chose the Delany and Basley model because our experiment is limited to rockwool-type materials.

The Delany and Basley theory requires two acoustic parameters: the characteristic impedance Z_1 , and the complex wave number k_1 . Both parameters depend on two important material properties: porosity, and resistivity to air flow [23].

Delany and Basley made numerous Kundt tube measurements in order to obtain the normal acoustic impedance of porous materials. Experiments were carried out on many samples from commonly used fibrous materials (mineral wool and glass fiber), the porosity of which is close to unity. By so doing, they were able to establish a number of formulas for Z_1 and k_1 as functions of the pulsation ω and the resistivity to air flow of the material.

$$Z_1 = \rho c \left[1 + 0.0571X^{-0.754} - 0.087iX^{-0.732} \right],$$

$$k_1 = \frac{\omega}{c} \left[1 + 0.0978X^{-0.7} - 0.189iX^{-0.595} \right]. \quad (22)$$

ρ , c are the specific mass and the sound velocity of the air. X is a non dimensional parameter: $X = \rho f / r_a$. f is the frequency, r_a is the resistivity to air flow.

The domain of validity of the Delany and Basley empirical model is defined by: $0.1 < X < 1$. From parameters Z_1 and k_1 , the surface normal acoustic impedance of the porous material is obtained,

$$Z_n = -iZ_1 \cot(k_1 e), \quad (23)$$

where e is the thickness of the absorbing material.

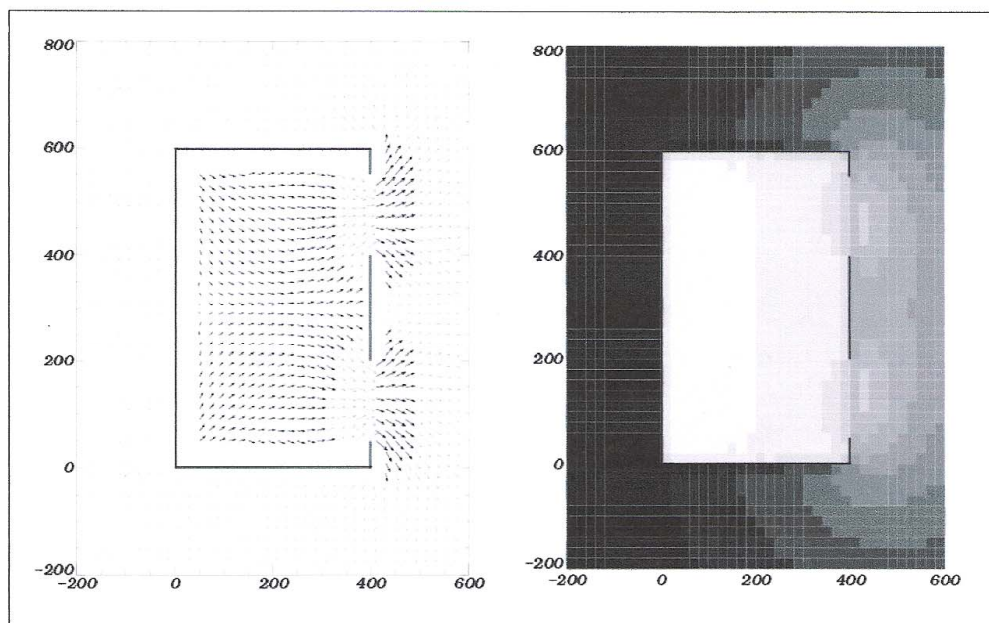


Figure 16. Acoustic pressure and active acoustic intensity at $f = 91$ Hz. The greyscales vary from $lp < 145$ (black) to $170.0 < lp$ (light grey) in steps of 2.5.

The structure under study is the same as in part 6.1, with a $0.2 \times 0.3 \text{ m}^2$ opening. The structure is 9.5 mm thick, but a 20 mm thick absorbing material blankets the interior walls. The material modeled is of a rockwool type. The resistivity to air flow is 100000 Ns/m^4 .

Figure 18 shows the absorption coefficient α in the [20–3000 Hz] frequency band. It is defined by:

$$\alpha = 1 - \left| \frac{Z_n - \rho c}{Z_n + \rho c} \right|^2, \quad (24)$$

where Z_n is derived from (23).

The acoustic power is computed when mechanical excitation is supplied to the structure. A mechanical force is injected to the plate, which is opposite the opening. The vibrational velocity is given by the Samcef software. Figure 19 compares the radiated acoustic powers with and without absorbing material. The absorbing material reduces the level of the Helmholtz resonance (91 Hz) and of the cavity acoustic modes (340, 425, 442, 510 Hz), but does not affect the structural modes. The efficiency of the absorbing material may appear to be low, but the structure is highly resonant as it is barely damped. Indeed, the acoustic material is assumed to provide no damping.

7. Conclusions

This paper presents computing method for the acoustic radiation of structures with openings. The basis of this

method derives from the work of Seybert. The method of Seybert has been extended to vibrating systems with or without absorbing material. The advantage of our method, compared to the other methods available (described in the introduction), is that it allows structures of any thickness to be processed at a lower computing cost. More precisely, by means of a BEM method, our model takes into account interior and exterior acoustic problems, and links both domains by velocity and pressure continuity conditions at the opening.

The numerical implementation of this method is expressed in the Bemhole computing code.

The Bemhole computing code has been compared to a pressure discontinuity method for a thin vibrating structure with an opening. Indeed, this method, used by the I-Deas Vibro-acoustic software, allows us to take into account only thin structures. Acoustic pressure and acoustic power compare well, provided the vibration inputs are close enough.

Moreover, the Bemhole computing code has been validated experimentally for a moderately thick open box. Acoustic power compares well up to 400 Hz.

By running the model, we have been able to compute the Helmholtz resonance frequency and the associated radiated power accurately, under a vibration excitation. The active acoustic intensity maps show how the power flow is distributed and organised between interior and exterior.

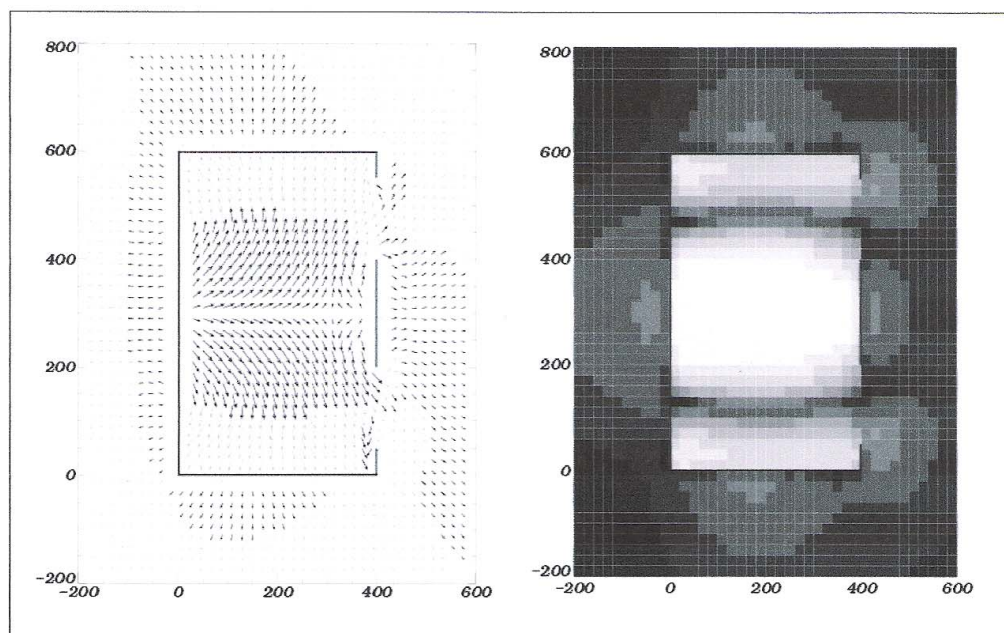


Figure 17. Acoustic pressure and active acoustic intensity at $f = 561$ Hz. The greyscales vary from $lp < 145$ (black) to $165.0 < lp$ (light grey) in steps of 2.5.

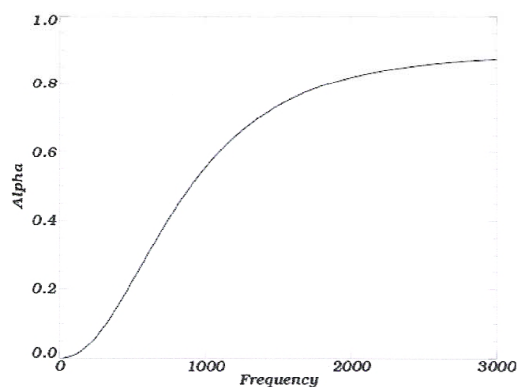


Figure 18. Absorption coefficient α for a resistivity to air flow $r_a = 100000 \text{ Ns/m}^4$ and 20 mm thickness.

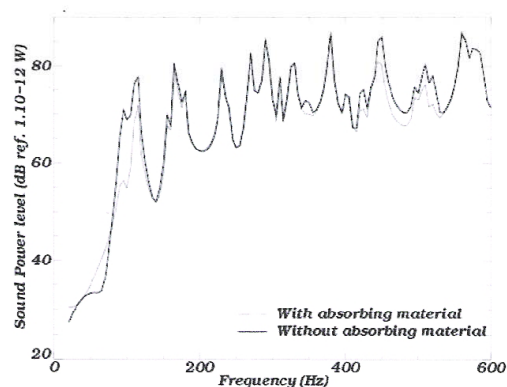


Figure 19. Acoustic power spectra for the structure with and without absorbing material.

Our first experiments on the influence of the number of openings show that it is possible to find optimal positions for the openings.

A comparison between structures with and without absorbing material confirms that only the Helmholtz resonator and acoustic modes have a reduced response level. Bernhole allows us to evaluate the benefit, in terms of noise reduction, of the absorbing treatment.

Appendix

A1. Assumption of no influence of acoustics on the structural vibration

Our method of computing ignores the modification of the vibration field by the acoustic fluid. A priori, it is difficult to find a numerical evaluation of this approximation. A rough estimate may be obtained from the transparency

results for rectangular plates. With our structures in air, no added mass effect is to be expected. The surface mass is too high. Thus, there is no problem with the resonant frequencies. The radiation depends on the structural response to acoustic pressure mainly by transparency effects. It is easy to show that the structural and acoustic resonant modes generate the highest levels of interference, which is what we are looking for. If we call L the structure operator, p the pressure field applied by the fluid to the structure, F the pressure field due to given external excitations, R the acoustic operator, u the surface displacement field on the structure, it is possible to write:

$$LU = p + F, \quad p = Ru.$$

The exact solution is obtained by solving:

$$(L - R)u = F.$$

Our approximate method computes:

$$p = RL^{-1}F.$$

This is the first term of a Neuman series, which converges if the operator norm $\|L^{-1}R\|$ is less than unity:

$$p = R \sum_{k=0}^{\infty} (L^{-1}R)^k L^{-1}F.$$

The main perturbations come when $\|L^{-1}R\|$ is high, in other words, for acoustically efficient structural resonances or structurally efficient acoustic resonances. The first option corresponds to high structural transparency, the second to interior modes and Helmholtz resonance. In our low-frequency situation, the resonant frequencies are sparse, and there is little likelihood of acoustic and structural resonance coinciding. The assumption of not matching the two types of resonance can therefore be made.

For the case of structurally efficient acoustic resonances (not too efficient, as noted above), a very crude energy and ray propagation based estimate is obtained by evaluating the ratio of the power Π_b propagating through the structure to the power Π_o propagating through the opening. The power, which is directly radiated from the exterior surface, is ignored.

If we call S_o the opening area, S_b the area of the box, and τ the transparency coefficient of the structure, the ratio can be written:

$$\frac{\Pi_b}{\Pi_o} \simeq \frac{\tau S_b}{S_o}.$$

An estimate of τ , between -20 dB to -35 dB, in the thickness and frequency range of §4 and §6, is deduced from the plate formulae [24, chapter 8]; with an area ratio of 25, we obtain:

$$0.008 \leq \frac{\Pi_b}{\Pi_o} \leq 0.25.$$

For the case of acoustically efficient structural resonances, we consider the situation of quasi-transparent plates under

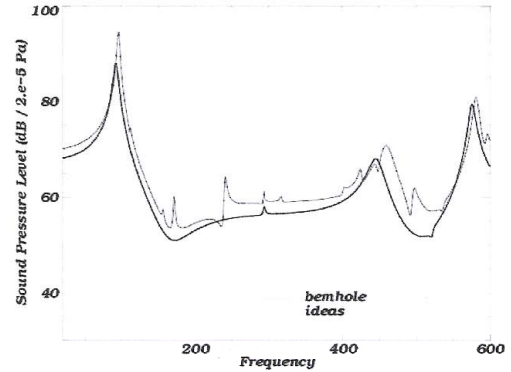


Figure A1. Acoustic pressure computed by Bemhole and by I-Deas Vibro-Acoustics 3 m in front of the aperture. The point source is inside the structure ($x = 0.154$ m, $y = 0.305$ m, $z = 0.355$ m).

an acoustic non-resonant interior field. From [24, chapter 8], we evaluate the transparency coefficient for our resonant plates with damping of 0.5% at -10 dB. Generally speaking, two of the six plates will be resonant. We have to compare the power radiated from inside through the resonant plates, Π_r , with the power radiated by other paths, Π . The components of Π are the power directly radiated by the structure under mechanical excitation and the power radiated through the opening. The power radiated through the non-resonant plates is neglected. We assume a ratio of unity between interior pressure and exterior pressure.

$$\frac{\Pi_r}{\Pi} \simeq \frac{\frac{1}{3}\tau S_b}{S_b} \simeq \frac{1}{3}\tau \simeq 0.03.$$

In the case of no mechanical excitation, but of an acoustic source inside, the same reasoning leads to

$$\frac{\Pi_r}{\Pi} \simeq \frac{\frac{1}{3}\tau S_b}{\frac{1}{25}S_b} \simeq 0.75.$$

As before coupling there is no power radiated by the structure, but only by the opening.

In summary, for a mechanically excited box with our characteristics, the error relative to the radiated power amounts to about 25%, or 1 dB. For an acoustically excited, the error amounts to 75%, or 3 dB. These evaluations do not cover the case of matched mechanical and acoustic resonance. The latter estimate appears to agree roughly with computations made with a point source inside the box: Figure A1 shows the coupled and non coupled results. The difference is somewhat higher than our evaluation of 3 dB as it concerns pressure, a more unstable parameter than power.

A2. Auto-influence term calculation

A2.1. G Auto-influence term

In the integral equations, the diagonal elements ($i = j$) require special processing of the integrals. The first problem is to compute the G term. By first order expansion of the Green function, we obtain, for $|x - y| \rightarrow 0$,

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r} - ik \right),$$

with $r = |x - y|$.

The function $1/r$ can be integrated into R^2 , but its numerical processing may be difficult. This is why we look for an analytical expression of the integral

$$I = \int_S \frac{dS}{r}.$$

In a polar coordinate system, we obtain:

$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{R(\theta)} \frac{1}{r} r dr d\theta.$$

We make the integration on a rectangular surface $2a$ in length and $2b$ in width. As seen from the center of the rectangle, the vertices of the rectangle have as angular coordinates $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$, $R(\theta)$ is then given by

$$R(\theta) = \begin{cases} a/\cos\theta & \theta^1 < \theta < \theta^2, \\ b/\sin\theta & \theta^2 < \theta < \theta^3, \\ -a/\cos\theta & \theta^3 < \theta < \theta^4, \\ -b/\sin\theta & \theta^4 < \theta < \theta^1, \end{cases}$$

where

$$\begin{cases} \theta^1 = \arctan(b/a), \\ \theta^2 = \pi - \arctan(b/a), \\ \theta^3 = \pi + \arctan(b/a), \\ \theta^4 = -\arctan(b/a). \end{cases}$$

The analytical expression of I is:

$$I = a \left[\ln \left[\tan(\theta/2 + \pi/4) \right] \right]_{\theta^1}^{\theta^2} + b \left[\ln \left[\tan(\theta/2) \right] \right]_{\theta^1}^{\theta^2} - a \left[\ln \left[\tan(\theta/2 + \pi/4) \right] \right]_{\theta^3}^{\theta^4} - b \left[\ln \left[\tan(\theta/2) \right] \right]_{\theta^3}^{\theta^4}.$$

A2.2. $\partial_n G$ Auto-influence term

We call J the auto-influence integral of

$$\partial_n G(x, y) = -\frac{ikr + 1}{4\pi r^2} e^{-ikr} \vec{I}_n \vec{n},$$

with \vec{I}_n the unit radial vector from y , parallel to $|x - y|$.

For a flat surface (our case), \vec{I}_n and \vec{n} are orthogonal, hence

$$\partial_n G(x, y) = 0 \quad x \neq y.$$

It is known that the integral J is defined as a Cauchy principal value,

$$J = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_1 - D_\varepsilon} \partial_n G(x, y) dS,$$

with D_ε a disk with radius ε and y centered.

Thus in this case $J = 0$.

References

- [1] A. F. Seybert, B. Soenarko, F. J. Rizzo, D. J. Shippy: An advanced computational method for radiations and scattering of acoustic waves in three dimensions. *J. Acoust. Soc. Am.* **80** (1986) 1241-1247.
- [2] C. Lesueur: Rayonnement acoustique des structures. Eyrolles, 1988.
- [3] C. Thirard, J.-P. Demars, D. Vaucher de la Croix: Mise en œuvre et application à des calculs vibroacoustiques d'une méthode d'identification modale travaillant dans le domaine temporel. Actes du 4ème Congrès Français d'Acoustique, Vol.1, Marseille, 14-18 Avril 1997, 253-256.
- [4] G. Elias, P. Malbécq: Scattering by an open sphere: Exact solution and comparison with a boundary integral method. *J. Acoust. Soc. Am.* **93** (1993) 609-616.
- [5] M. A. Hamdi: Formulation variationnelle par équations intégrales pour le calcul de champs acoustiques linéaires proches et lointains. Thèse de doctorat, Université de Technologie Compiègne, 1982.
- [6] A. F. Seybert, C. Y. R. Cheng, T. W. Wu: The solution of coupled interior/exterior acoustic problems using the boundary element method. *J. Acoust. Soc. Am.* **88** (1990) 1612-1618.
- [7] K. R. Holland, F. J. Fahy: The radiation of sound through an aperture in a noise control enclosure via iteration around a finite element-boundary element loop. *Noise Control Eng. J.* **44** (1996) 231-234.
- [8] A. F. Seybert, C. Y. R. Cheng: Applications of the boundary element method to acoustic cavity response and muffler analysis. *ASME J. Vib. Acoust. Stress Rel. Dsgn.* **109** (1987) 15-21.
- [9] F. Polonio, T. Loyau, J. M. Parot, G. Gogu: Calculation of the acoustic radiation of structures with openings. *Inter-Noise 2000*, Nice, 27-30 Août 2000, CDROM IN2000/456.
- [10] F. Polonio, T. Loyau, J. M. Parot, G. Gogu: Validation numérique et expérimentale d'une méthode de calcul du rayonnement acoustique de structures avec ouvertures. 6ème Congrès Français d'Acoustique, Lille, 08-11 Avril 20002.
- [11] M. Bruneau: Manuel d'acoustique fondamentale. Hermes, 1998.
- [12] H. A. Schenck: Improved integral formulation for acoustic radiation problem. *J. Acoust. Soc. Am.* **44** (1967) 41-58.
- [13] W. H. Press, W. T. Vetterling, S. A. Teukolsky, B. P. Flannery: Numerical recipes in C: The art of scientific computing, 2nd ed. Cambridge University Press, 1992. chap.2, p. 78-89.
- [14] A. T. Chronopoulos: On the square unsymmetric lanczos method. *Journal of computational and applied Mathematics* **54** (1994) 65-78.

- [15] A. Homm, J. Ehrlich, H. Peine, H. Wiesner: Experimental and numerical investigation of a complex submerged structure. Part I: Modal analysis. *Acta acustica* **89** (2003) 61–70.
- [16] A. Homm, J. Ehrlich, H. Peine, H. Wiesner: Experimental and numerical investigation of a complex submerged structure. Part II: Sound radiation. *Acta acustica* **89** (2003) 71–77.
- [17] J. C. Pascal: Structure and patterns of acoustic intensity fields. 2ème congrès international sur l'intensimétrie acoustique, CETIM, 23-26 Avril 1985, 97–104.
- [18] J. Tichy: Use of the complex intensity for sound radiation and field studies. 2ème congrès international sur l'intensimétrie acoustique, CETIM, 23-26 Avril 1985, 113–120.
- [19] F. J. Fahy: Sound intensity. Elsevier Applied Science, London and New York, 1989.
- [20] M. E. Delany, E. N. Basley: Acoustical properties of fibrous materials. *Applied Acoustics* **3** (1970) 105–116.
- [21] F. P. Mechel: Ausweitung der Absorberformel von Delany and Basley zu tiefen Frequenzen. *Acustica* **35** (1976) 210–213.
- [22] K. Attenborough: Acoustical characteristics of porous materials. Physics Report, North-Holland Publishing Company, 1982.
- [23] P. C. Carman: L'écoulement des gaz à travers les milieux poreux. P.U.F., 1961.
- [24] P. J. T. Filippi: Acoustique générale. les Editions de Physique, 1994.

Elimination of a non-oscillatory instability in a retarded potential integral equation

Jean-Marc Parot^{a,*}, Christophe Thirard^b, Christian Puillet^c

^a*Laboratoire de Mécanique et Ingénieries, Institut Français de Mécanique Avancée et Université Blaise Pascal, BP265, Campus de Clermont/Les Cézeaux, 63175 Aubière, France*

^b*OldB-Metravib, 200 chemin des Ormeaux, 69760 Limonest, France*

^c*Centre National d'Etudes Spatiales, 18 avenue Edouard, Belin, 31401 Toulouse Cedex9, France*

Received 15 December 2005; accepted 4 September 2006

Available online 18 December 2006

Abstract

This paper deals with the unstable behaviour of an acoustic boundary element model. The model, based on a marching on time (MOT) algorithm, uses a hypersingular derivative Green method. It is able to cope with open or closed diffracting objects. These objects are rigid or can be deformed. When a long enough computation is carried out, the pressure magnitude shows an exponential growth, which is an unrealistic behaviour. In the paper we show that we are faced with a numerical instability of the static pressure in closed cavities. A simple processing method using the eigenelement decomposition of an ‘ad hoc’ matrix suffices to correct the problem without damage to other components of the result. The method is related to a more general method dedicated to instability problems.

© 2006 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Time-marching algorithm; Acoustics; Boundary elements method; Singularity; Static pressure; Instability; Eigenelement

1. Introduction

The authors noted that nothing has been published on the instability of “static” (or pneumatic) modes in hypersingular time formulation. This fact motivated them to write this paper. “Hypersingular” refers to the nature of the Green kernel used for the integral calculation. In this approach, which is based on the normal derivative of the integral formulation, this kernel yields integrals that are non converging in the classical sense and require specific processing.

1.1. Hypersingularity in time algorithms

Solving the sound (or d’Alembert) equation using a boundary-element time formulation has been a classic and well-documented method for many years [1]. This techni-

que, which is sometimes also called the retarded potential technique [1], is used classically to deal with rigid body diffraction problems [2]. It is also used, along with finite-element structural models, to perform vibro-acoustic modelling [3,4], as well as modelling of absorbing surfaces with very simple behaviour [5].

Surface integral equation formulation is based either on a “direct” representation (“Kirchhoff integral equation”) or on a “derivative” representation. The representation based on the “normal derivative of the Kirchhoff integral equation” (also called the “thin” element or “shell-type” element representation [6]) presents many practical advantages and is particularly well suited to industrial vibro-acoustic situations. It can indeed apply to any surface, either open surfaces, i.e., including one or several edges, or closed surfaces, i.e., with no edge. It can then be suitable for bodies of complex shape, presenting both closed cavities and open cavities. As a drawback, a high-order singularity, which cannot be integrated in the usual sense, must be dealt with in the integration. It makes sense in the distribution theory framework. The result of the integration of this “hypersingularity” is then called “Hadamard’s finite part”.

*Corresponding author.

E-mail addresses: parot@ifma.fr (J.-M. Parot),
Christophe.Thirard@01db-metravib.com (C. Thirard),
christian.puillet@cnes.fr (C. Puillet).

The work presented here refers to this type of calculation. It was carried out using vibroacoustic software combining time formulation and hypersingularity: ASTRYD [3].

1.2. State of the art in hypersingularity

There are very few publications on *time* hypersingular formulations. However, papers by Ergin et al. are to be noted, which mainly dealt with eliminating of irregular frequencies through an extension of the well-known Burton and Miller technique [7] to the time domain, and a decrease of calculation time by adapting the Fast Multipole Method [8]. Most of the time in acoustics, hypersingular formulations are worked out in the frequency domain. In a formal way, time and frequency formulations are equivalent through a Fourier transform. Refs. [6,9–12] showed the viability of the calculation using the hypersingular kernel. Guiggiani et al. have shown that the theoretical value assigned to the hypersingular integral is in line with its physical meaning [10].

1.3. Instability and closed cavity

Our research originates from the following basic observation: for some calculations taking up a relatively long time, the problem unknowns—pressure jump and average surface pressure—rise exponentially.

This behaviour is observed simply on a cube (Fig. 1). The cube contains air inside and outside. It is excited by the motion of one of its surface element (labelled “1” below),

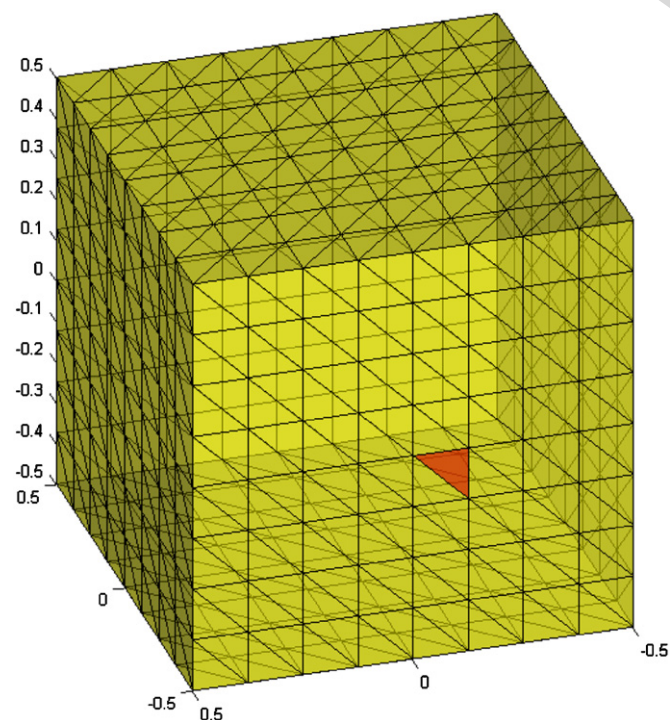


Fig. 1. Cube meshed into triangular elements.

shown on the figure. Fig. 2B shows the pressure jump (difference between internal and external pressure) on the surface of the cube.

1.4. State of the art in instability

The instability of the calculations in time integral formulation has been documented for a long time. It is evidenced by oscillations of increasing amplitude, often with a $2\Delta t$ period, sometimes with a longer period. It has been analysed as reflecting the growth of mesh modes, due to unavoidable numerical errors [13]. These high-frequency oscillating instabilities have been well studied in the electromagnetic domain, where this technique is frequently used. The methodologic contribution of Rynne et al. [13] and Davies et al. [14,15] is to be noted: a theoretical study based on the von Neumann's stability analysis technique, which is usual in finite differences, is possible in simplified geometries, planes or spheres, for every mesh wavenumber value. The aforementioned authors have then searched for the numerical propagation modes in the scheme. Their theoretical predictions on more or less filtering explicit schemes are in line with their numerical experiments. Unfortunately, the analysis of implicit schemes has not been developed. Works by Gaul et al. [16] are very interesting. Searching for the numerical propagation modes too, they studied other geometrical shapes (tubes) and suggested a technique to deal with instabilities.

Several papers [2,7] show the determining role of the implicit character of the numerical scheme in favour of stability. The ASTRYD code presented here is indeed based on an implicit scheme.

Does the precision of element integration affect the result? In our calculation, the unknown function is spatially constant for each element. This results from a hypersingularity-based constraint: the calculation of Hadamard's finite part is a lot easier using this discretisation hypothesis. However, the time history is assumed to be continuous and piecewise linear. Integrals are accurately calculated using a Gauss point technique. Although Bluck and Walker [2] suggest to use spatially quadratic elements, the determining point to us is the consistency of the scheme and the precision of the calculation of the integrals on each element. This seems to be in accordance with Ergin's works [7], which use spatially constant and time piecewise-cubic functions, but also with Lavie's observations [17] on the need for a sufficiently accurate time representation. We can then conclude that stability is better with a numerical scheme that is implicit and accurate enough for time integration.

Instabilities studied by the aforementioned authors are all oscillating in the high-frequency domain. However, problems of non-oscillating instabilities, such as those observed here, have not been studied.

The unstable component of the pressure jump observed in a cube (Fig. 2) is almost constant over the whole surface. It then prompts to look into the ' $\Delta p = \text{constant}$ over the

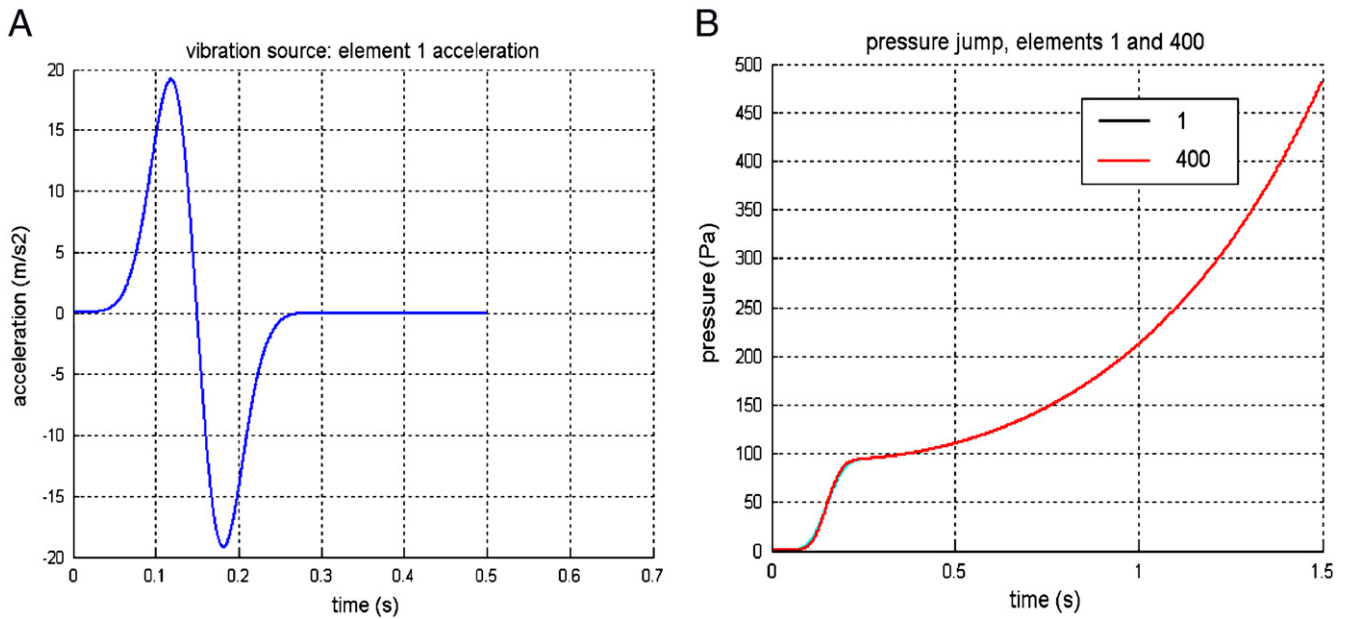


Fig. 2. (A) Time history of the acceleration imposed on the mobile element of the cube (element # 1). (B) Time history of pressure jump Δp for two different elements of the cube. The two curves, which correspond to two different elements, are almost superimposed.

surface' solutions. Modelling based on the “derivative” time formulation shows that function ‘ $\Delta p = \text{constant}$ over the surface’ is an eigensolution for a closed cavity (see Sections 3.1–3.3). This specific type of eigenmode of the cavity is called ‘closed volume pneumatic mode’. The physical nature of this mode is obvious: it represents a permanent static pressure being held after:

- a variation of volume for a constant mass of fluid (Fig. 2),
- a variation of mass for a constant volume (case of an internal point source, a situation which has also been observed).

This mode is physically stable ($p = \text{spatial and time constant}$), but numerical errors related to discretisation could make it unstable by modification of the associated eigenvalue.

Hereafter we will describe the algorithm more precisely and report our observations on instabilities (Part 2). We will then specify the analytical formulation leading to the very simple concept of ‘pneumatic mode’, which allows to understand observations (Part 3). Finally, we will propose a correction technique (Part 4), the efficiency of which will be tested on examples (Part 5).

2. Numerical experiments on the original algorithm

2.1. Original algorithm

ASTRYD is a commercial code, funded on a MOT basis. It was correctly validated by comparison to analytical reference benchmarks [3], but also by comparison to experimental results [3,4,18]. We are interested in

the hypersingular ‘shell’ part of the algorithm. It processes the following boundary value problem: given a surface (closed in our problem) with a given motion, residing in a homogeneous medium with wave speed c , and some point sources in the acoustic fluid, find the pressure everywhere in the fluid—inside and outside the surface. Our starting point is (Eq. (2.2)). That is exactly Ergin’s normal derivative formulation [Ref. [7], Eq. (7)], if we assume in this latter that the left-hand side has two components, one due to incident pressure and one due to surface motion. It is well known that after solving this equation, one obtains the pressure everywhere in a whole acoustic domain, containing interior and exterior of the surface. See, for example, Kirkup [6] for the same problem in the frequency domain. The formulation describes simultaneously the exterior problem of radiation and diffraction and the interior problem of acoustic modal response. Below we recapitulate how it can be deduced from the Kirchhoff integral equation, or retarded potential radiation-diffraction formula for a surface σ in presence of an external sound source. According to Kirchhoff integral equation, the pressure field in M_0 at t_0 is such that

$$\begin{aligned} (4\pi - A)p(M_0, t_0) = & \int \int_{\sigma} \left[p(M, t_0 - d/c) \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) \right. \\ & \left. - \dot{p}(M, t_0 - d/c) \frac{1}{cd} \frac{\partial}{\partial n_M} (d) \right] ds \\ & + \rho_0 \int \int_{\sigma} \frac{1}{d} \ddot{w}(M, t_0 - d/c) ds \\ & + \frac{4\pi}{r} S(t_0 - r/c), \end{aligned}$$

where M is the current point on σ , r the distance between M_0 and the source, $d = |M_0 M|$, distance between M_0 and

M , ds the surface element at M , \vec{n}_M the outward normal at M (outward = directed toward the source), \ddot{w} , normal acceleration of the surface, algebraic value on n_M axis,

$$A = \begin{cases} 0 & \text{if } M_0 \text{ exterior to } \sigma \\ 2\pi & \text{in a regular point of } \sigma \\ \text{solid angle, tangent to } \sigma \text{ in } M_0 & \text{(non-regular point)} \end{cases}.$$

Hypotheses: Let us assume that σ is a *thin surface*: σ is composed of two surfaces Σ_1 and Σ_2 , which are “very close”. It can be shown that the contribution of the “edges” of σ (junction area between Σ_1 and Σ_2) tends to 0 when Σ_1 and Σ_2 become closer (Fig. 3).

Let p_1 be the pressure on Σ_1 , and p_2 the pressure on Σ_2 .

$$\begin{aligned} \text{Let : } \Delta p &= p_1 - p_2 \\ \bar{p} &= (p_1 + p_2)/2 \\ \vec{n}_M &= \text{outward normal to } \Sigma_1. \end{aligned}$$

At the $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_1 = \Sigma$ limit, for a point outside of the surface, one can write

$$4\pi p(M_0) = \int \int_{\Sigma} \left(\Delta p^* \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) - \Delta \dot{p}^* \frac{1}{cd} \frac{\partial}{\partial n_M} (d) \right) ds + \frac{4\pi}{r} S^*, \quad (2.1)$$

p^* , S^* : retarded values (in $t_0 - d/c$ or $t_0 - r/c$).

Let us calculate the normal derivative of (2.1) at point M_0 in terms of *distributions* and using Euler's equation (i.e., the Equation of dynamics) for the acoustic fluid:

$$\begin{aligned} -4\pi \rho_0 \ddot{w}(M_0) &= \text{FP} \int \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(\Delta p^* \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(\Delta \dot{p}^* \frac{1}{cd} \frac{\partial}{\partial n_M} (d) \right) \right] ds(M) \\ &\quad + 4\pi \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(\frac{S^*}{r} \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

The FP symbol refers to the Hadamard finite part of the integral of a distribution. It can be used for any integral, since, for regular or weakly singular integrals, it is equivalent to their usual value or to the Cauchy principal value, of which it is a generalisation in distribution theory.

M_0 is the point on E where Δp is to be computed, M is the current point on Σ and \vec{n}_M , \vec{n}_{M_0} are normals to Σ in M and M_0 , respectively.

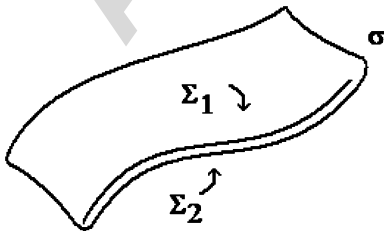


Fig. 3. ‘Shell’s’ or ‘thin surface’s’ sketch.

Eq. (2.2) is validated from a frequency approach: Fourier transform of (2.2) can be written

$$4\pi \rho_0 \omega^2 \hat{w}(M_0) = \text{FP} \int \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 G}{\partial n_{M_0} \partial n_M} \Delta \hat{p} ds + 4\pi \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \hat{S} \right),$$

as it follows from calculations in Section 3.1. This latter formula agrees with Eqs. (6) and (10) in Ref. [11]. The univocal character of the Fourier transform ensures that Eq. (2.2) is relevant.

Eq. (2.2) is the equation to solve in order to obtain Δp .

Note: In Eq. (2.2), M_0 belongs to Σ , whereas in Eq. (2.1) M_0 is outside Σ . This can be explained based on the fact that Eq. (2.2) is derived from Eq. (2.1) through a normal derivation followed by a transition to the $M_0 \rightarrow \Sigma$ limit. Both members of Eq. (2.2) are then each the limit for $M_0 \rightarrow \Sigma$ of an expression where M_0 does not belong to Σ : this is the explanation for the 4π factor (instead of 2π) before $\rho_0 \ddot{w}(M_0)$.

After solving Eq. (2.2), Eq. (2.1) yields the field at distance from the body. The additional unknown, \bar{p} , is determined using the relationship obtained by going to the $M_0 \rightarrow \Sigma$ limit in Eq. (2.1) written on both sides of Σ :

$$4\pi \bar{p}(M_0) = \int \int_{\Sigma} \left(\Delta p^* \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) - \Delta \dot{p}^* \frac{1}{cd} \frac{\partial}{\partial n_M} (d) \right) ds + \frac{4\pi}{r} S^*, \quad (2.3)$$

The Appendix A presents a reformulation of the different terms of Eq. (2.2) showing geometrical influence factors that affect S , Δp and their time derivatives.

The thin surface under consideration is discretised into triangular planar elements (the triangular shape is not mandatory).

Notation:

- Subscript i characterises the reference element (or current element).
- Subscript j indicates elements of the mesh interacting with element i .
- $X^{(l)}$ corresponds to X computed for time step $t_0 - l\Delta t$.
- Δt is the time step.

After discretisation, system (A8), presented in the Appendix A, is obtained. If all terms corresponding to index $l = 0$ (current time t_0 of calculation) are regrouped, it can be written in a matrix form:

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} -\frac{1}{2\pi} [E1_{ij}^{(0)}] & I - \frac{1}{2\pi} [E2_{ij}^{(0)}] \\ I & -1/2I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta p_j^{(0)} \\ Q_j^{(0)} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 2c\Delta t \{ \tilde{S}_i \} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l>0} [E1_{ij}^{(l)}] \{ \Delta p_j^{(l)} \} + \frac{1}{2\pi} \sum_{l>0} [E2_{ij}^{(l)}] \{ Q_j^{(l)} \} \\ \{ \tilde{S}_i \} \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Eq. (2.4) is then an implicit system to be solved at each time step in order to get the $\{\Delta p_j^{(0)}, Q_j^{(0)}\}$ solution that is sought. It is to be noted that matrix:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2\pi} [E1_{ij}^{(0)}] & I - \frac{1}{2\pi} [E2_{ij}^{(0)}] \\ I & -1/2I \end{bmatrix}$$

with I the unit matrix, does not vary over time. It depends on the selected discretised geometry and on calculation parameter $c\Delta t$. Right after calculating instantaneous auto or inter-influence coefficients $E1_{ij}^{(0)}$ and $E2_{ij}^{(0)}$, an LU decomposition of this matrix should be carried out, in order to further solve system (2.4) while avoiding the costly use of its inverse. This LU decomposition is unique, and calculated once for all for a given mesh and time discretisation.

No filtering was applied in the experiments presented hereafter.

As soon as Δp -pressure jump through surface Σ -is obtained according to aforementioned principles, the average pressure \bar{p} can be estimated. It depends on Δp according to Eq. (2.3), which is discretised using the same principles as for Eq. (2.2). The algorithm described by Eq. (2.4) is purely acoustic. If need be, coupling with a vibrating structure is performed using an iterative process at each time step. But as such, it is perfectly suitable for our analysis since our purpose is to show that, even in the absence of coupling with a flexible structure, pneumatic instabilities already occur. All calculations are carried out in single precision mode.

2.2. Calculations on a cube

Calculation carried out on a cube consists in having an element radiating by imposing an acceleration on it and

observing results on the different acoustic variables obtained. The cube has a 1-m side and is made up of 128 identical triangular elements per face (Fig. 1).

The profile of the source (acceleration) is a Gauss derivative represented in Fig. 2A. One can observe that the source fades out after about 0.25 s.

The primary computed result is the pressure jump between both sides of the surface. It is shown in Fig. 2B for the excited element (# 1) and another element (# 400). The instability is clear. The main physical results are the pressures on both sides of the surface. The Fig. 4 below shows curves obtained for the pressure on the inner side and the outer side of the same elements: the excited element (#1) and another element (# 400).

Clearly the instability is a feature of the internal pressure. Moreover, the internal pressure has very little variations from element to element: Fig. 5A shows the pressure jump at six different places, randomly situated. These responses, which are very similar, speak in favour of a pneumatic mode based on a uniform mode shape.

Over the excitation time (about 0.25 s), the observed internal pressure corresponds to the cavity being depressurised: decreased static pressure due to increased volume. This phenomenon is the forced response to the excitation. The pressure then seems to stabilise before undergoing an exponential growth characteristic of instability (free response of the pneumatic mode).

Finally, the pressure radiated in selected points is represented in Fig. 5B. What is observed was predictable. The pressure radiated outside, as expected, shows no instability. The pressure at the centre of the cube (point $x = 0$) is identical to the pressure on the inner surface. As a conclusion, and already with a single cavity, an exponentially shaped instability occurs for all acoustic parameters

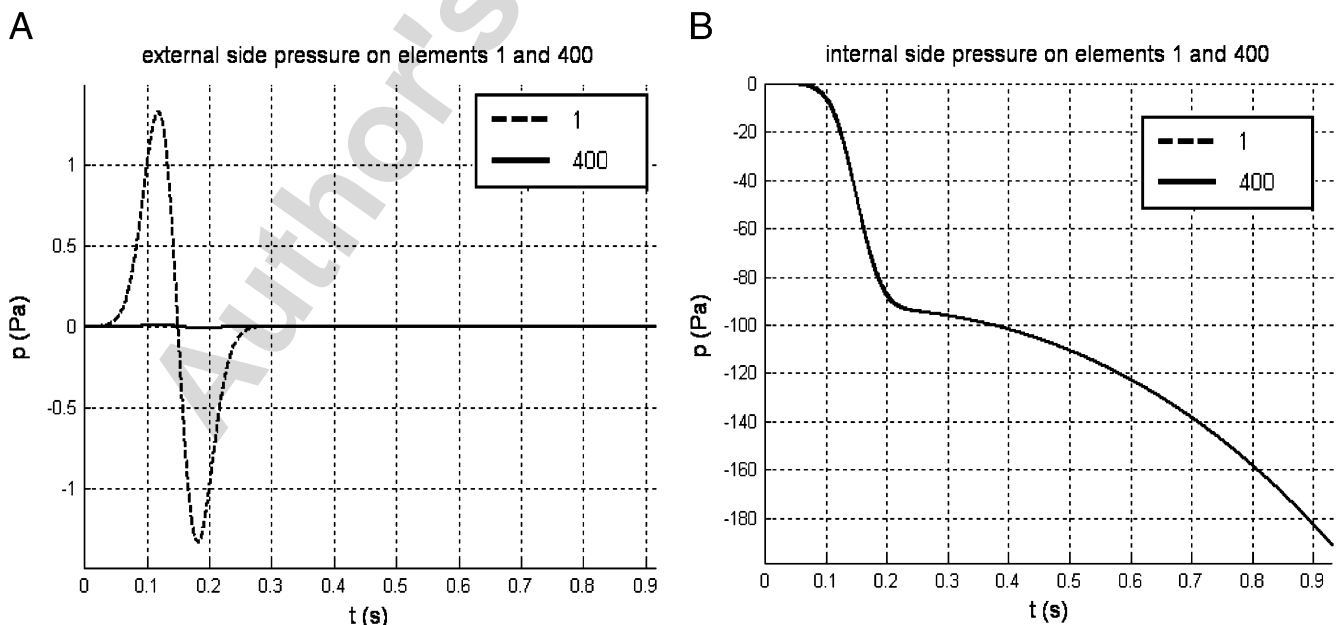


Fig. 4. Pressure: (A) on the external side. (B) on the internal side of the cube.

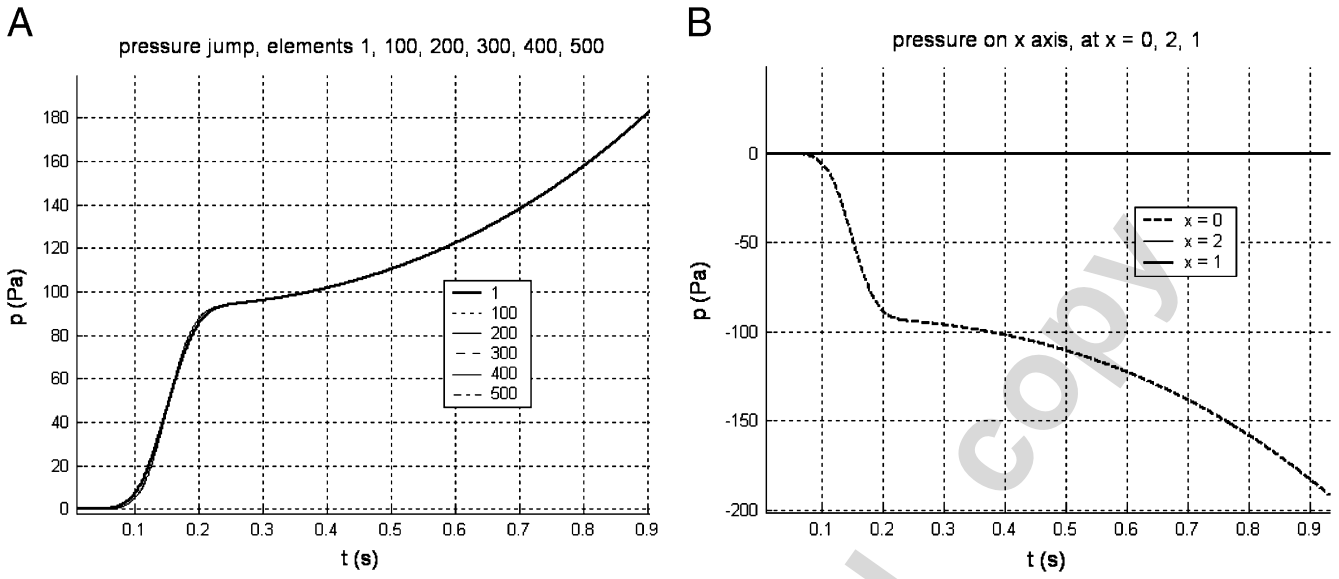


Fig. 5. (A) The pressure jump has very small variation between elements. (B) Pressure at distance from the surface. The point at $x = 0$ is the sole element inside the cube. $x = 2$ and 1 are practically identical.

related to the cavity. This occurs approximately when the source fades out. External pressures are not affected by this instability.

Validation of the static pressure variation: Our aim is to check that the variation of static pressure observed on ASTRYD responses corresponds indeed to the imposed variation of volume. Acoustics equations are based on the hypothesis of adiabatic evolution of air, considered as a perfect gas, which leads to the following relationship for small pressure variations:

$$dp/p = -\gamma dv/v \quad (2.5)$$

(v = volume of the cube). Since the mobile element has a normal speed as seen from inside, $\dot{w} = \exp(-\beta(t - t_0)^2)$, the variation of volume is equal to $dv = \int_0^\infty \dot{w} dt = -S_f \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\beta(t - t_0)^2) dt = -S_f \sqrt{\pi/\beta}$, where

- S_f is the element area. Since the cube has a 1-m long edge and 128 identical elements per face, then $S_f = 1/128 \text{ m}^2$;
- $\beta = 500 \text{ s}^{-2}$;
- $t_0 = 0.15 \text{ s}$.

Volume v is equal to 1 m^3 and if $\gamma = 1.4$ and $p = 101,300 \text{ Pa}$, Eq. (2.5) yields $dp = -87.8 \text{ Pa}$.

A rather good agreement can be observed between the calculated variation of static pressure and that generated by ASTRYD when the variation of volume is completed (e.g., Fig. 5, $t = 0.2 \text{ s}$).

2.3. Calculations on two cubes

The two cubes, which are identical to that described above, are placed side by side on the x axis, their respective centres being 2 m apart (Fig. 6).

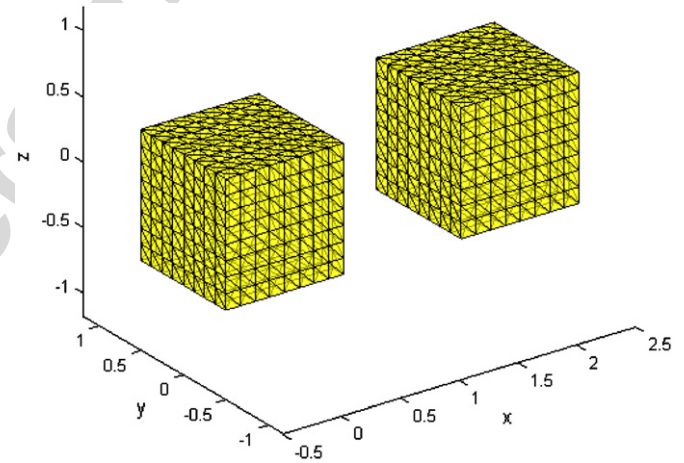


Fig. 6. Two closed cubes.

The profile of the source is the same as that presented in Fig. 1. The same element (#1) is forced to radiate.

Let us first study the external pressure on the elements (Fig. 7A).

As in the single cube case, it can be observed that the external pressure is not affected, as far as divergence is concerned by what occurs inside the cavities.

The pressure radiated in three points, centre of the excited cube ($x = 0$), middle point on the inter-cube distance ($x = 1$) and centre of the inert cube ($x = 2$), can be observed in Fig. 7B. The pressure generated inside the excited cube is similar to that observed in Fig. 5B. Similarly, the pressure radiated outside the two cubes appears unchanged. However, the pressure radiated inside the inert cube exhibits a divergence of exponential evolution. This increase in p occurs, with no prior increase of the static pressure, unlike that observed at the centre of the first cube.

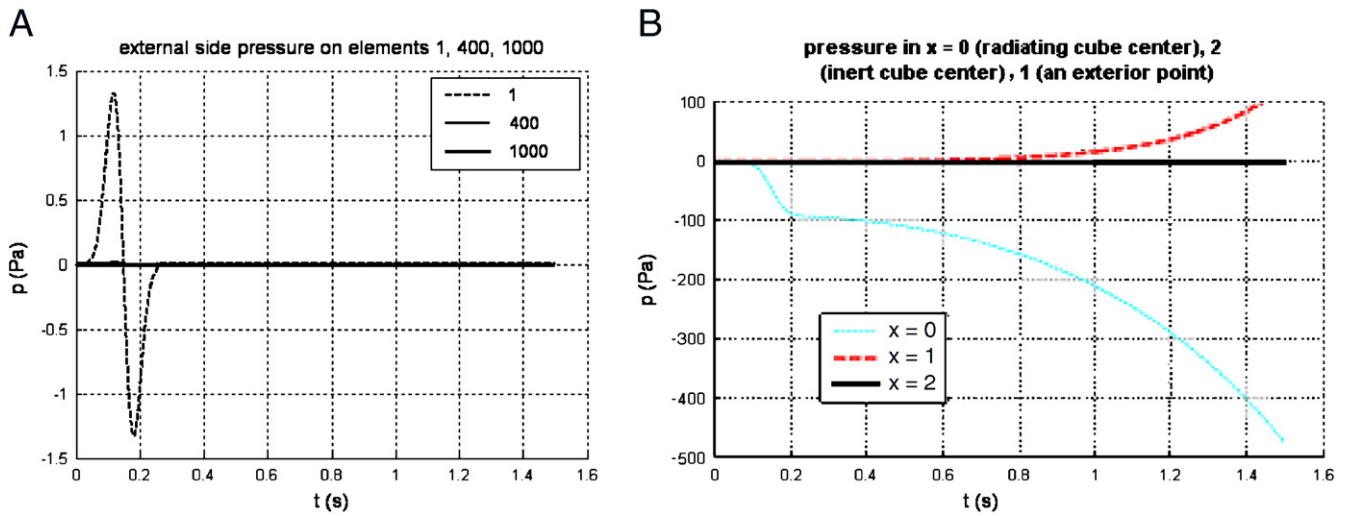


Fig. 7. (A) External pressure in elements # 1 and # 400 (excited cube), and # 1000 (inert cube). #1 and # 400 are practically identical at the figure's scale. (B) Pressure at distance from the surface. The point at $x = 0$ is the sole element inside the vibrating cube.

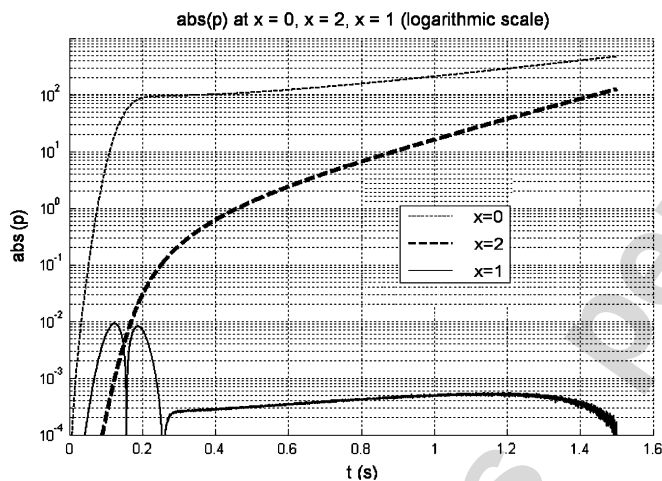


Fig. 8. Pressure magnitude at $x = 0$ (vibrating cube centre), $x = 2$ (inert cube centre) and $x = 1$ (an exterior point).

The behaviour of the pressure jump on the surface of the two cubes does not bring any specific element. The plot of the pressure magnitudes using a logarithmic scale (Fig. 8) shows however, that internal pressures of the two cubes do not follow the same exponential growth: the slopes of the ' $x = 0$ ' curve and of the ' $x = 2$ ' curve are clearly different. This point is an argument favouring the idea that there are as many pneumatic modes as closed cavities. What is observed here are free responses of two unstable modes, whose modal pressure is spatially uniform on the cubes.

The two-cubes case can be summarised as follows:

- Like for the one-cube case, purely external acoustic variables do not exhibit any divergence.
- Divergence occurs for the pressure jump and the internal pressure of the two cavities (excited cube and inert cube).

- Divergence is related to instabilities of pneumatic modes, i.e., of zero frequency and uniform mode shape on a cavity.
- Since there are two cavities, there are also two pneumatic modes, each having its own growth constant, which explains that divergences relative to each cube are different.
- With no direct excitation, the inert closed volume exhibits divergence, but no increase to a finite static pressure, since it does not undergo any variation of volume.

These conclusions are corroborated by the observed responses (not represented here) when the inert cube is opened (removal of an element). There is then no divergence for any acoustic variable related to the open cube. There is only one instability mode: that of the closed cube.

2.4. Calculations on a complex geometry

The main advantage of the hypersingular formulation, as mentioned in Part 1, is the possibility to process the very frequent realistic situations with shells, plates or panels imbedded in an acoustic fluid. An example of such a structure is the spatial structure called MAQSATH [4,18]. MAQSATH presents both open panels and two adjacent closed cavities. Our analysis and the correction method we propose must absolutely work in the case of MAQSATH, which is an industrial application of ASTRYD.

The scheme above (Fig. 9) shows a simplified representation of the MAQSATH axisymmetrical structure (cross section along its axis).

A perspective view of the mesh is shown in Fig. 10. It contains 1098 triangular elements.

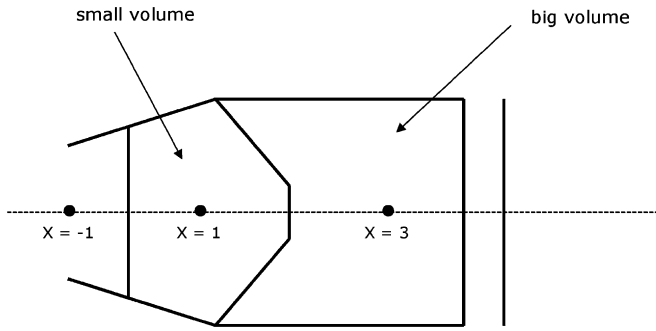


Fig. 9. Simplified representation of MAQSATH (cross section).

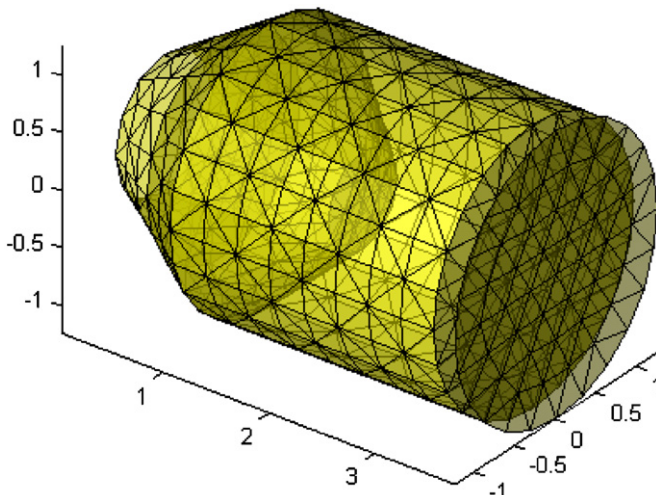


Fig. 10. MAQSATH mesh.

Acoustic excitation: An acoustic point source is placed inside the big volume at $x = 2.5$ m. The time derivative of its mass flow is of the same type as that in Fig. 2A. Results are presented in Fig. 11. In this case of purely acoustic excitation, a divergent behaviour can also be observed. The forced response of the “pneumatic” mode of the big cavity (curve at $x = 3$ m in Fig. 11B) seems to stabilise between 0.2 and 0.25 s, i.e., about when the source fades out. A stationary value can then be observed for the pressure (about 11,000 Pa). Then, after the source has died out, free responses of the modes can be observed: the curve is of the exponential type, with increasing magnitude.

For the pressure inside the small volume ($x = 1$ m’ curve in Fig. 11B), an exponential behaviour is observed right from the start: as the small volume is not excited, the free response of the unstable mode is immediately observed.

3. Analysis of numerical experiments

As we have just seen, the numerical experiment strongly suggests the existence of modes with zero frequency and uniform mode shape on each cavity, these modes becoming unstable for numerical reasons. In this part, we will show that stable modes also exist in our formulation prior to discretisation.

3.1. “Derivative” or “hypersingular” frequency formulation

Let us start from Eq. (2.2) and apply it to surface Σ surrounding volume V (Fig. 12). Let us assume that V is entirely inside Σ : $V \cap \Sigma = \emptyset$. In the absence of any excitation (structure vibration, noise source), the formula

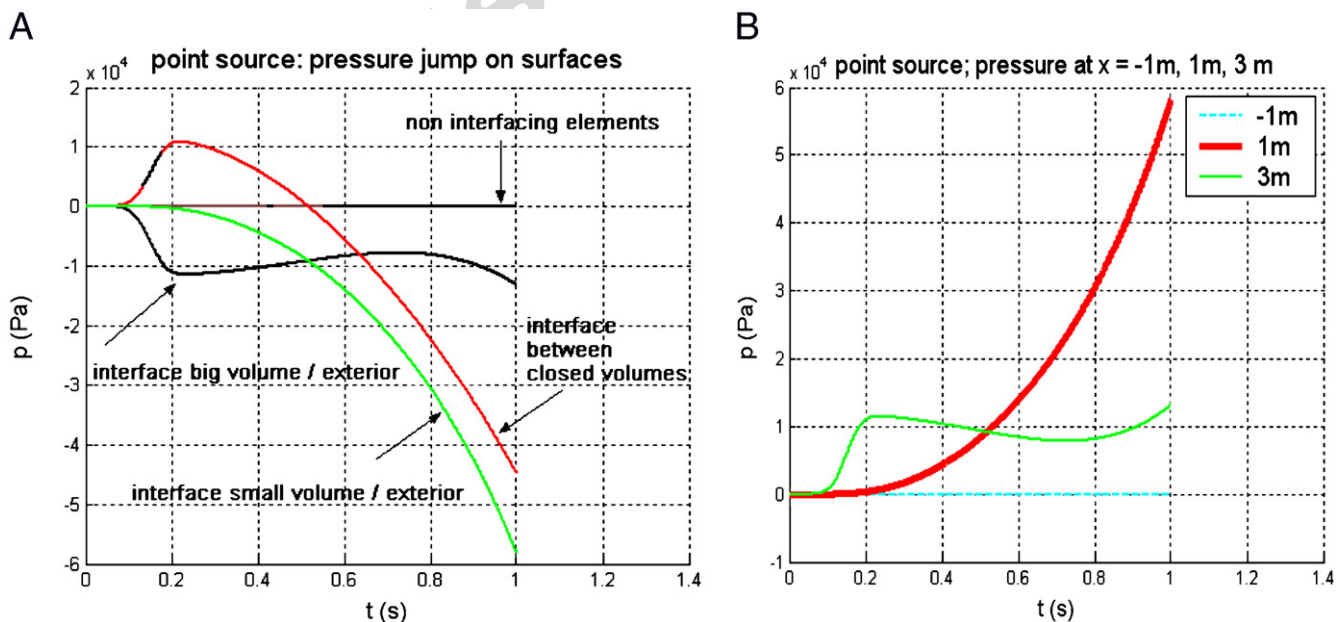
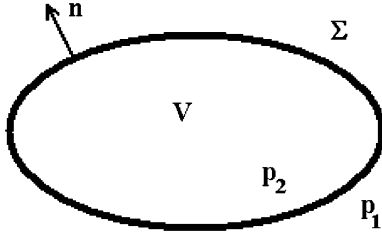


Fig. 11. Point source at $x = 2.5$ m. (A) Pressure jump on different parts of MAQSATH. (B) Pressure in three points.

Fig. 12. Sketch of V and Σ .

becomes:

$$\text{FP} \int \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(\Delta p^* \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(\Delta p^* \frac{1}{cd} \frac{\partial}{\partial n_M} (d) \right) \right] ds(M) = 0. \quad (3.1)$$

It must be satisfied for any M_0 on Σ and for any t .

Searching for the eigenmodes of the problem comes down to searching for solutions to this problem “with no right-hand member”.

The Fourier transform of Eq. (3.1) can be written as:

$$\text{FP} \int \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(\Delta \hat{p} e^{-i\omega d/c} \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) \right) - \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(i\omega \Delta \hat{p} e^{-i\omega d/c} \frac{1}{cd} \frac{\partial}{\partial n_M} (d) \right) \right] ds(M) = 0.$$

or:

$$\text{FP} \int \int_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(\Delta \hat{p} e^{-i\omega d/c} \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) - i\omega \Delta \hat{p} e^{-i\omega d/c} \frac{1}{cd} \frac{\partial}{\partial n_M} (d) \right) \right] ds(M) = 0. \quad (3.2)$$

The pressure jump is that at point M . It is not affected by the gradient with respect to M_0 . The equation can then be written as follows:

$$\text{FP} \int \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(e^{-i\omega d/c} \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) - i\omega e^{-i\omega d/c} \frac{1}{cd} \frac{\partial}{\partial n_M} (d) \right) \Delta \hat{p} ds(M) = 0. \quad (3.3)$$

We show that the expression in brackets is the normal derivative of Green's function $G(M, M_0) = e^{-ikd}/4\pi d$. Usual derivation rules indeed yield:

$$\frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{e^{-ikd}}{d} \right) = e^{-ikd} \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) - \frac{1}{d} i k e^{-ikd} \frac{\partial}{\partial n_M} (d),$$

where $\omega = kc$. This leads to a new form of Eq. (3.3):

$$\text{FP} \int \int_{\Sigma} \frac{\partial^2}{\partial n_{M_0} \partial n_M} \left(\frac{e^{-ikd}}{d} \right) \Delta \hat{p} ds = 0. \quad (3.4)$$

or, using the usual Green function:

$$\text{FP} \int \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 G}{\partial n_{M_0} \partial n_M} \Delta \hat{p} ds = 0. \quad (3.5)$$

Given the univocal character of the Fourier transform, searching for eigenmodes $\Delta p(x, t)$ of Eq. (2.2) comes down to searching for eigenmodes $\Delta \hat{p}(x, \omega)$ of Eq. (3.5).

3.2. The “double derivative” frequency formulation accepts “pneumatic” eigenmodes at zero frequency

We will not search for all possible modes. We will just check that function $\Delta \hat{p}(x, \omega) = \text{constant}$ on the boundary of one closed cavity is a solution of Eq. (3.5).

This comes down to show that relationship

$$\text{FP} \int \int_{\Sigma} \frac{\partial^2 G}{\partial n_{M_0} \partial n_M} ds = 0. \quad (3.6)$$

is satisfied for any point M_0 on any closed surface Σ . From the divergence formula, with $\Delta_M f$ being the Laplacian of function f in M , and V the inner volume of the closed surface Σ :

$$\text{FP} \int \int_{\Sigma} \frac{\partial G}{\partial n_M} ds(M) = \text{FP} \int \int \int_V \Delta_M(G) dv(M).$$

By definition, Green's function obeys the following relationship:

$$\Delta_M G(M_0, M) + k^2 G(M_0, M) = \delta(M_0, M)$$

hence:

$$\begin{aligned} \text{FP} \int \int \int_V \Delta_M G(M_0, M) dv(M) \\ = -k^2 \text{FP} \int \int \int_V G(M_0, M) dv(M) + \varepsilon(M_0), \end{aligned} \quad (3.7)$$

where

$$\begin{cases} \varepsilon(M_0) = 1, & M_0 \in V, \\ \varepsilon(M_0) = 1/2, & M_0 \in \Sigma, \\ \varepsilon(M_0) = 0, & M_0 \notin V \cup \Sigma, \end{cases}$$

deriving from the relationship that is well known in distribution theory (Dirac integration): $\int \int \int_V \delta_{M_0}(M) dv(M) = \varepsilon(M_0)$.

For a zero frequency, $k = 0$, and, from Eq. (3.7), it is seen that the volume integral of the Laplacian of the Green function is ε . Its normal derivative with respect to M_0 , $\text{FP} \int \int_{\Sigma} (\partial^2 G / \partial n_{M_0} \partial n_M) ds(M)$, is then equal to zero for M_0 inside or outside V . If $M_0 \in \Sigma$, the integral is to take in finite part and is equal to the limits on both sides, which are zero. We thus obtain Eq. (3.6), which was given in Ref. [19], as an identity valid for $k = 0$ and $M_0 \notin \Sigma$.

Hence any $\Delta \hat{p}(x, \omega) = \text{constant}$ function on the boundary of a closed cavity is an eigenmode at zero frequency for the problem stated by Eq. (3.5).

The behaviour of the pressure outside this surface will be solved in the next paragraph.

3.3. Modes for $\Delta p = \text{constant}$ also exist in the time formulation prior to discretisation

Theoretically speaking, this verification is not required since both formulations are equivalent through the Fourier transform.

However it can be very useful. We will then search for solutions $\Delta p(x, t)$ of Eq. (3.1), which are constant time and space-wise. The right-hand member is equal to zero, since it contains the time derivative of the pressure jump. We have to demonstrate that

$$\text{FP} \int \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(\Delta p^* \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) \right) ds = 0. \quad (3.8)$$

With the pressure jump being constant in time and space, this comes down to:

$$\text{FP} \int \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(\frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) \right) ds = 0. \quad (3.9)$$

Calculations presented in Section 3.2 have shown the validity of this formula.

Any time and space constant function on the boundary of a closed cavity is an eigenmode of the problem stated by Eq. (3.1).

Let us calculate the secondary variables that fully describe the pressure field. The usual formula used in “no derivative” formulation applies for the pressure outside the surface and for the average pressure on the surface (2.1, 2.3): in the absence of point source, and using temporarily the same symbol, \bar{p} , for the pressure at any point not belonging to surface Σ and for the average pressure on the surface

$$4\pi\bar{p}(M_0) = \int \int_{\Sigma} \left(\Delta p^* \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) - \Delta p^* \frac{1}{cd} \frac{\partial}{\partial n_M} (d) \right) ds.$$

As the pressure jump is constant in time and space:

$$4\pi\bar{p}(M_0) = \Delta p \int \int_{\Sigma} \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) ds = -A\Delta p, \quad (3.10)$$

where A is the solid angle under which the surface is seen from point M_0 , i.e.:

$$\begin{cases} A = 4\pi & M_0 \in V \\ A = 2\pi & M_0 \in \Sigma \\ A = 0 & M_0 \notin \Sigma \cup V. \end{cases} \quad (3.11)$$

From the relationship on Σ , one can derive the values for the external (p_1) and internal (p_2) surface pressures, according to the definition given in Section 2.1:

$$\begin{cases} p_1 = 0, \\ p_2 = -\Delta p. \end{cases}$$

From the two other relationships (3.11), one can get the pressures outside (p_{ext}) and inside (p_{int}) the volume:

$$\begin{cases} p_{\text{int}} = p_2, & M_0 \in V, \\ p_{\text{ext}} = 0, & M_0 \notin \Sigma \cup V. \end{cases}$$

The constant pressure jump eigenmodes of Eq. (3.1) for a closed cavity have as pressure distribution a zero pressure in open space and a constant pressure in closed space.

3.4. Case for several cavities

Disjoint cavities: There are several volumes with no common boundaries: Fig. 13. We search for a constant solution on each surface (a vector with N components for N surfaces Σ_n , $n = 1, \dots, N$). Formula (3.8) is extended to several closed cavities. We will show that

$$\text{FP} \int \int_{\bigcup_n \Sigma_n} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left(\Delta p^* \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) \right) ds = 0 \quad (3.12)$$

when the pressure jump is constant on each surface Σ_n , and that it is true for any value of these constants and for any point M_0 on the different surfaces. If, for instance, M_0 belongs to Σ_1 , the integral of (3.12) is composed of one hypersingular integral over Σ_1 and of $N-1$ integrals for which M_0 is an exterior point. As shown in Section 3.3, both types of integrals are equal to zero as soon as pressure jumps are constant on each surface. Their sum is equal to zero, which shows that a solution that is constant by cavity is an eigenmode. The calculation of pressures outside the surfaces Σ_n is generalised in the same way, from Eqs. (3.10) to (3.11).

In the case of N disjoint cavities, Eq. (3.1) has one multiple eigenmode solution, of multiplicity N and characterised by a zero pressure for any point exterior to the volumes and by a constant pressure—with a different value—inside each volume.

Cavities with a common panel (Fig. 14): the normal cannot be uniformly oriented on each surface.

Let us search for a mode associated with pressure q_1 in cavity 1 and pressure q_2 in cavity 2, with the following

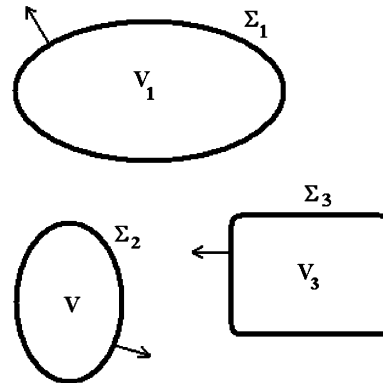


Fig. 13. Sketch of separate cavities and their normals.

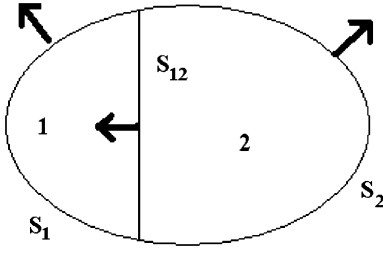


Fig. 14. Cavities with a common panel.

pressure jumps:

$$\Delta p = -q_2 \text{ on } S_2$$

(surface of cavity 2 without common
interface of both cavities);

$$\Delta p = -q_1 \text{ on } S_1$$

(surface of cavity 1 without common
interface of both cavities);

$$\Delta p = q_1 - q_2 \text{ on } S_{12}$$

(cavity 1/cavity 2 interface)

Extending Eq. (3.8) to this case yields

$$\text{FP} \int \int_{S_1 \cup S_2 \cup S_{12}} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left[\Delta p \frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) \right] ds = 0$$

or:

$$\begin{aligned} & -q_1 \text{FP} \int \int_{S_1} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left[\frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) \right] ds \\ & -q_2 \text{FP} \int \int_{S_2} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left[\frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) \right] ds \\ & + (q_1 - q_2) \text{FP} \int \int_{S_{12}} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \left[\frac{\partial}{\partial n_M} \left(\frac{1}{d} \right) \right] ds = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Regrouping q_1 and q_2 terms yields closed surface integrals that we have already encountered, except at the junction of panels, where the finite part situation is not clear. Except for these specific points, our solution satisfy the eigenmode relationship. The generalisation to N cavities is obvious. The generalisation of Eq. (3.10): $4\pi\bar{p}(M_0) = \sum_n - (A_n \Delta p_n)$, where n is the panel number, allows to get suitable internal pressures and a zero external pressure.

In the case of N adjacent cavities, Eq. (3.1) has a multiple eigenmode solution of multiplicity N , which is characterised by a zero pressure for any point outside the volumes and by a constant pressure—with a different value—inside each volume.

3.5. Conclusion from the numerical experiments and theoretical analysis

Our work shows that the divergence problem is purely acoustic since it can occur without taking the elastic structure into account.

Theory shows that in hypersingular time formulation there are modes with constant pressure by cavity, as soon as there are closed cavities. These modes, associated with time-constant pressures, are then stable. It can be concluded that discretisation, then digitising, of the problem generate errors leading to instability. The multiple mode (of multiplicity N) with a zero growth rate turns into N modes with positive growth rates.

The scenario triggering instability can be described as follows: the excitation imposed generates a variation of static pressure resulting from a variation of volume at constant mass or from a variation of mass at constant volume. The pneumatic modes of the different cavities are excited. After a phase of forced response, the modes respond freely, hence diverge according to their exponential growth rate. Because of unavoidable numerical errors, the modes of non-excited cavities are also apparent. The outer open parts of the object are weakly contaminated by these unstable components. On the scale of the figures, no divergence can be seen.

4. Correction method aiming at stabilising pneumatic modes

4.1. Matrix formulation of the time algorithm

Let us take the discretised equations of ASTRYD (2.4). For the pneumatic mode(s) to be stable, the solution of Eq. (2.4) must satisfy the following conditions under no excitation:

- $\{\Delta p\}$ constant in time, hence vector Q (i.e., $\Delta \dot{p} \cdot \Delta t$) is equal to zero.
- $\{\Delta p\}$ at current time t is equal to $\{\Delta p^{(l)}\}$ (vector at instant $t-l\Delta t$) for any l : in the first row of System (2.4), matrices $E1^{(l)}$ can be regrouped.

One then gets the following system:

$$\left[A - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{Nr} [E1^{(l)}] \right] \{\Delta p\} = 0 \quad \text{or} \quad [M] \{\Delta p\} = 0 \quad (4.1)$$

In this equation:

- $[A] = -1/(2\pi)[E1^{(0)}]$ is a matrix of inter-influence coefficients at the current time.
- $[E1^{(l)}]$ is a matrix built from inter-influence coefficients $E1_{ij}$ between elements i and j for the retarded time step l .

Nr is the maximum number of retarded time steps to take into account. Thus it is also the maximum number of matrices $E1$ and $E2$ to build. In practice, one can note that this number is different depending on the matrices. The highest value will be taken here.

Based on a heuristic approach, one can say that, in order to have stable pneumatic modes, relationship (4.1) must be true, which is definitely not the case for unstable modes. This suggests that numerical matrix $[E1^{(n)}]$ ($n = 0, \dots, Nr$)

must be modified so that relationship (4.1) is true. Meanwhile, only minimum modification is desirable, in order to keep results that are good for the other modes.

The mathematical problem to solve can then be stated as follows: Find a matrix $[M']$, not very different from $[M]$, such as $[M'] \cdot \{\Delta p\} = 0$ for any ‘pneumatic’ vector.

In practice $[M]$ has N eigenvalues that are very small with respect to others, and are representative of the N pneumatic modes corresponding to the N cavities of the problem. Our idea is to change $[M]$ into $[M']$ so that the first N eigenvalues of $[M']$ are exactly equal to zero.

Let $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ be the “quasi zero” eigenvalues of $[M]$, assumed to be diagonalizable. Values and eigenvectors of $[M]$ are defined by

$$[M] \cdot u_i = \lambda_i u_i.$$

Values and normalised eigenvectors of the adjoint matrix $[M^*]$ are defined by

$$[M^*] \cdot v_i = \bar{\lambda}_i v_i \text{ and } v_i^* \cdot u_j = \delta_{ij}$$

(x^* is the conjugated transpose of x , λ is the conjugate of A). These eigenvectors are used to create the projection matrices

$$[P_i] = u_i \cdot v_i^*.$$

A theorem [20] states that any diagonalizable matrix has a unique “spectral decomposition”:

$$[M] = \sum_{i=1}^K \lambda_i [P_i]$$

where K is less or equal to the dimension of $[M]$. By sorting the eigenelements of interest from the others, one can write

$$[M] = \sum_{i=1}^N \lambda_i [P_i] + \sum_{i=N+1}^K \lambda_i [P_i].$$

Matrix $[M'] = [M] - \sum_{i=1}^N \lambda_i [P_i]$ has N zero eigenvalues, corresponding to eigenvectors $u_j (j = 1 \dots N)$. Indeed,

$$[M'] u_j = \sum_{i=N+1}^K \lambda_i [P_i] u_j = \sum_{i=N+1}^K \lambda_i u_i (v_i^* u_j) = 0.$$

Other eigenelements remain unchanged, with respect to M , due to the uniqueness of the decomposition.

In practice, only the first N eigenelements of matrix $[M]$ need to be calculated. It is worth noting that this matrix is very sparse. The idea of taking an action on the eigenvectors of the discretised system to control instabilities was slightly mentioned in Refs. [14,15], and more explicitly in Ref. [16].

4.2. Selection of a correction technique

When the ‘quasi-zero’ eigenvalues of $[M]$, λ_i , and their associated projection matrices, $[P_i]$ ($i = 1$ to N), have been determined, new matrices must be built: $[A]$, $[E1^{(n)}]$ ($n = 1, \dots, Nr$). They are required for the calculation, and they must be such as the new matrix $[M']$ has N zero eigenvalues, i.e., $[M'] = [M] - \sum_{i=1}^N \lambda_i [P_i]$. The difficulty arising is to know on which terms to apply the modifications, i.e., how to distribute them among $[A]$ and the various matrices $[E1^{(n)}]$, $n = 1, \dots, Nr$.

Further analysis of the *eigenvectors of the fully discretised formulation* brings out arguments favouring to have all modifications applied to A . Our purpose is indeed to bring the less possible disturbance to the physical components of the system and not to introduce any new instability. Without any excitation, System (2.4) can be written as follows:

$$\begin{aligned} [A] \cdot \{\Delta p^{(k)}\} + \left[I - \frac{1}{2\pi} E2^{(0)} \right] \cdot \{Q^{(k)}\} \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{Nr} [E1^{(n)}] \cdot \{\Delta p^{(k-n)}\} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{Nr} [E2^{(n)}] \cdot \{Q^{(k-n)}\} \\ I \cdot \{\Delta p^{(k)}\} + \frac{1}{2} I \cdot \{Q^{(k)}\} = \sum_{n=1}^{\infty} \{Q^{(k-n)}\}, \end{aligned}$$

where k is the subscript of the current time step. One searches for the eigenvalues and the eigenvectors of the formulation in the form of vectors remaining unchanged over time:

$$\begin{Bmatrix} \Delta p^{(k)} \\ Q^{(k)} \end{Bmatrix} = \mu^k \{\Phi\} = \mu^k \begin{Bmatrix} \Phi_s \\ \Phi_i \end{Bmatrix}.$$

By analogy with differential equation systems, we know that the response to any excitation will be expressed by a combination of these eigenvectors. We also know that the magnitude of the eigenvalue determines the stability of the corresponding eigensolution. Transferring this form into the complete system yields the following system of eigenvalues and eigenvectors:

$$\begin{aligned} [A] \cdot \mu^k \{\Phi_s\} + \left[I - \frac{1}{2\pi} E2^{(0)} \right] \cdot \mu^k \{\Phi_i\} \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{Nr} [E1^{(n)}] \cdot \mu^{k-n} \{\Phi_s\} + \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{Nr} [E2^{(n)}] \cdot \mu^{k-n} \{\Phi_i\} \\ I \cdot \lambda \mu^k \{\Phi_s\} - \frac{1}{2} I \cdot \mu^k \{\Phi_i\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{k-n} \{\Phi_i\}. \end{aligned}$$

As a problem of convergence of the sum arises for the right-hand side of the equation, it is replaced with the difference between the equation at $k-1$ step and equation at k step. The second relationship then becomes: $2(\mu-1)\{\Phi_s\} = (\mu+1)\{\Phi_i\}$.

Let us copy this out in the first equation to eliminate $\{\Phi_s\}$:

$$\begin{aligned} [A] \cdot \mu^k(\mu + 1)\{\Phi_s\} + 2 \left[I - \frac{1}{2\pi} E2^{(0)} \right] \cdot \mu^k(\mu - 1)\{\Phi_s\} \\ = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{Nr} [E1^{(n)}] \cdot \mu^{k-n}(\mu + 1)\{\Phi_s\} \\ + \frac{2}{2\pi} \sum_{n=1}^{Nr} [E2^{(n)}] \cdot \mu^{k-n}(\mu - 1)\{\Phi_s\}. \end{aligned}$$

After simplification:

$$\begin{aligned} \mu^{Nr}(\mu + 1)[A] \cdot \{\Phi_s\} + 2\mu^{Nr}(\mu - 1) \left[I - \frac{1}{2\pi} E2^{(0)} \right] \cdot \{\Phi_s\} \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{Nr} \mu^{Nr-n}(\mu + 1)[E1^{(n)}] \cdot \{\Phi_s\} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{Nr} \mu^{Nr-n}(\mu - 1)[E2^{(n)}] \cdot \{\Phi_s\} = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

a more synthetic form of which can be written, with obvious notations:

$$\sum_{n=0}^{Nr} \mu^{Nr-n}[(\mu + 1)[C^{(n)}] + 2(\mu - 1)[D^{(n)}]] \cdot \{\Phi_s\} = 0. \quad (4.3)$$

Eq. (4.3) is a generalised problem of eigenvalues of polynomial form, of degree $Nr + 1$. One does not need to solve it to notice that:

- If there is one eigenvalue $\mu = 1$, one gets relationship (4.1), which is the condition of existence for a pneumatic mode. Condition (4.1), of time constant mode, must be satisfied to have an eigenvalue $\mu = 1$. In this case $[M] = [M']$, and no modification is to be brought to matrix $[M]$.
- If $\mu = -1$ (high-frequency oscillations, at the Nyquist frequency), non-zero terms (depending on $E2^{(n)}$ only) are not modified by the processing applied to $[M]$. Original eigenvalues (if any) are then unchanged. The stabilising processing of $[M]$ does not induce any high-frequency instability.
- If $|\mu| < 1$, predominant terms of (4.3) are those of lowest degree. Modification of the highest-degree terms will then generate minimum disturbance for these terms. Modification of $[A]$ component only corresponds precisely to this option. This is clear in Eq. (4.2). Evidently, for μ with magnitudes close to 1, this is a very rough reasoning.
- $|\mu| > 1$ means instability. The instability studied here is associated with $\mu = 1 + \eta$, $|\eta| \ll 1$.

At the first order in η , before processing, the generalised problem of eigenvalues (4.3) becomes:

$$\sum_{n=0}^{Nr} (1 + (Nr - n)\eta)[C^{(n)}] \cdot \{\Phi_s\} + \eta \sum_{n=0}^{Nr} [D^{(n)}] \cdot \{\Phi_s\} = 0$$

or else, if we note that from the definition of $[C^{(n)}]$, $\sum_{n=0}^{Nr} [C^{(n)}] = [M]$:

$$[M] \cdot \{\Phi_s\} + \eta \left(\sum_{n=0}^{Nr} (Nr - n)[C^{(n)}] + \sum_{n=0}^{Nr} [D^{(n)}] \right) \cdot \{\Phi_s\} = 0. \quad (4.4)$$

The stabilising processing leads to replace all $[C^{(n)}]$ with $[C^{(n)}]$ satisfying relationships

$$\sum_{n=0}^{Nr} [C^{(n)}] \cdot \{u_i\} = [M'] \cdot \{u_i\} = 0 \quad (4.5)$$

with ‘pneumatic pressure’ vectors $\{u_i\}$ as defined in Section 4.1.

A new system of generalised eigenvalues is built from the matrices modified in this way. This system is obtained from (4.3). By restricting the development to the first order of η , we have

$$[M'] \cdot \{\Phi'_s\} + \eta' \left(\sum_{n=0}^{Nr} (Nr - n)[C^{(n)}] + \sum_{n=0}^{Nr} [D^{(n)}] \right) \cdot \{\Phi'_s\} = 0 \quad (4.6)$$

$\eta' = 0$, $\{\Phi'_s\} = \{u_i\}$ is a solution to this problem since with these values, Eq. (4.6) is satisfied. Hence at the first order of η , the processing we propose leads to the stabilisation of pneumatic modes. Moreover, the distribution mode of the modification has no effect on the result, as seen directly in Eqs. (4.5)–(4.6).

This shows that for small instability rates, any ‘pneumatic’ vector is approximately a stable eigen solution of the modified problem.

- The case “complex μ of magnitude 1” requires a more detailed analysis which is off the scope of the present study.
After a very rough analysis of the problems of the eigenmodes of the complete algorithm, we can draw the following conclusions:
- Our technique leads, assuming weakly unstable pneumatic modes, to an approximate correction of the instability of the said modes.
- A qualitative argument allows to propose the idea that by focussing the modification on matrix $[A]$, the physical behaviour is disturbed to a minimum, since this behaviour results from the eigenvalues of magnitude smaller than 1, corresponding to damped oscillations or to exponential decays.

Under these conditions, we decided to have all modifications applied to matrix $[A]$. In practice one should then compute the N smallest eigenvalues of $[M]$ and replace $[A]$ with:

$$[A'] = [A] - \sum_{i=1}^N \lambda_i [P_i].$$

5. Numerical experiments with the corrected algorithm

5.1. Calculations on a cube

Let us start from the cube described in Section 2.2 and use a vibration-type excitation (radiation of element 1). The figure below shows the influence of the processing on the element. The present case is a one-mode case ($N = 1$): only one eigenvalue, that with the smallest absolute value, is to cancel. The processing is very straightforward, search for the smallest eigenvalues, then calculate its eigenvector and that of the associated adjoint system.

Figs. 15A and B correspond to two different excitations. Fig. 15A presents the same excitation as that described in Section 2.2 and presented in Fig. 2A. In Fig. 15B, the excitation has the same form, the same amplitude and the same time position, but is 100 times shorter. The purpose of the experiment is to test the “harmlessness” of the processing technique for oscillating components, which in principle are not affected by our operation on the matrix.

We can note that, in the first case, the pressure jump gets approximately stabilised: the exponential growth decreases significantly. This improvement should suffice to process time responses and calculate their Fourier transform easily without being penalised by instability. In the second case, dynamic pressure oscillations are stronger than the static pressure generated by the variation of volume, which is very small. The pneumatic mode is then far less excited than the other modes, for non-zero frequencies, and processed and unprocessed responses should remain the same. Very little variations are indeed to be noted: responses are slightly different at the end, as expected, since the original response is greater than the processed response, in this case where the static component is not very noticeable (about 1 Pa). This shows that the correction

performed on matrix $[A]$ has little influence on other eigenvalues and eigenvectors and that the dynamic behaviour remains unchanged.

5.2. Calculations on a purely acoustic complex case (MAQSATH)

In this case with two cavities and ‘free’ panels, the following indications are available for eigenlements of matrices $[M]$ and $[M']$. After calculation, they are sorted by order of increasing magnitude: Table 1.

The ratio of cavity-related eigenvalues to the smallest other eigenvalues is of the order of 10^{-4} . Eigenvectors associated with the first two eigenvalues are constant for each panel, with relative variation of the order of 10^{-4} within a given panel. Eigenvectors associated with the next eigenvalues are very different, with continuous variations similar to those of acoustic modes.

The processing has very effective results on the first two eigenvalues (Table 2). The relative disturbance is of the order of 5×10^{-3} for λ_3 and of the order of 10^{-4} for λ_4 and λ_5 . Eigenvectors have the same features as those of $[M]$.

The MAQSATH structure is excited with an acoustic source located in (2.5; 0; 0), i.e., inside the big volume (see Fig. 9). The source is the same as that used in Section 2.4. The processing is carried out on two eigenvalues, those with the smallest absolute value ($N = 2$). Fig. 16 shows,

Table 1
First five eigenvalues of $[M]$ (before processing)

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
2.57×10^{-6}	-5.24×10^{-6}	0.0347407	$0.0393934 - 0.0000229i$	$0.0393934 + 0.0000229i$

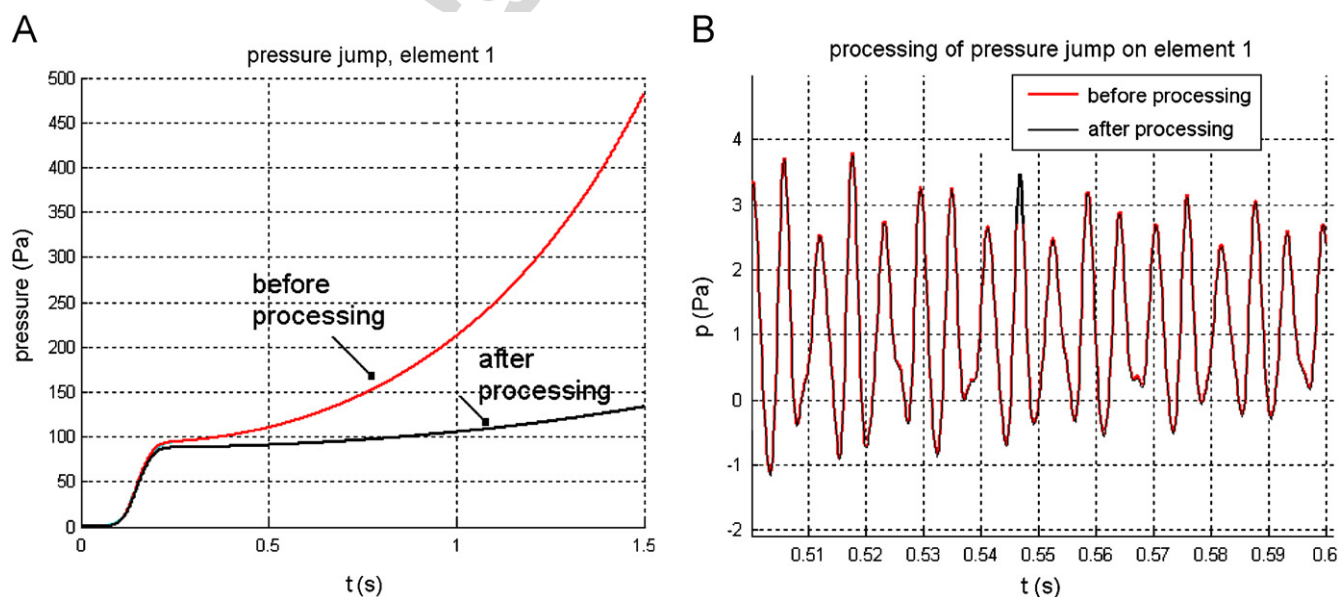


Fig. 15. Vibration source. Pressure jump on element # 1. (A) Long-time excitation. (B) Short-time excitation, signal around 0.5 s.

after correction processing on matrix $[M]$, the pressure jump on elements 1 (on the disc-shaped outer panel), 400 (big volume/outside interface), 700 (interface between the two volumes) and 1050 (small volume/outside interface). Left and right figures result from the same data, but the figure on the right-hand side shows a strong expansion of the vertical scale.

One checks that divergence disappears. To do so, one must compare these curves to the original curves shown in Fig. 11A. Responses are stabilised, with still a slight tendency to increase (which is observed when the curve is zoomed in). Elements that are in contact with the excited volume (400 and 700) exhibit an important increase in static pressure. The opposite signs are due to the different normal orientation on the interfaces. For element 700, the pressure jump stabilises around 11,590 Pa after 0.6 s. For element 1050, which is contact with the small volume, the pressure should stabilise around 0 since the structure is rigid and since there is no variation of volume for the small volume. In practice, one can notice in the figure on the right that the pressure jump on element 1050 has the same behaviour as for element 700, with a stabilisation around 153 Pa, after 0.6 s, which can be neglected with respect to 11,590 Pa. The behaviour of the responses on these two elements corresponds then to what could be expected. A purely numerical influence can be observed. As for

element 1, its response is very weak since it is located on a surface that is not in contact with a closed volume.

The robustness of the correction on the MAQSATH structure was also tested by exerting a short excitation (the same acoustic source was contracted by a factor of 100). Responses on elements 100, 700 and 1050 (located on the big volume/outside interface, on the big volume/small volume interface, and on the small volume/outside interface respectively) are compared before and after processing (Fig. 17). At the beginning, responses are exactly the same. Differences occur over time and become noticeable toward the end of the calculation. However, differences remain small compared to initial orders of magnitude.

5.3. Coupled vibroacoustic calculations

Let us use the aforementioned MAQSATH mesh. Now the object is an elastic structure. The acoustic-elastic coupling technique relies on an iterative calculation at each time step using the ‘in vacuo’ structural modal basis [3].

The excitation is a plane wave generated by an acoustic source located in $x = 0$, $y = 0$ and $z = 1000$ m. The excitation profile is a Gauss derivative:

$$s(t) = -2\beta(t - t_1)e^{-\beta(t-t_1)^2}$$

with $t_1 = 2.8$ ms, $\beta = 1.6 \times 10^6 \text{ s}^{-2}$

The time step is $\Delta t = 0.858$ ms. For the fluid, $\rho = 1.293 \text{ kg/m}^3$ and $c = 343 \text{ m/s}$.

The structure consists of two parts [4,18]:

- A ‘cylinder+cones’ set: structure with a mass of 2060 kg, presenting its first ‘in vacuo’ mode at 30 Hz and a structural damping of 1%.

Table 2
First five eigenvalues of $[M]$ (after processing)

λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
-5.04×10^{-17}	1.21×10^{-16}	0.0346061	$0.0394034 - 0.0000203i$	$0.0394034 + 0.0000203i$

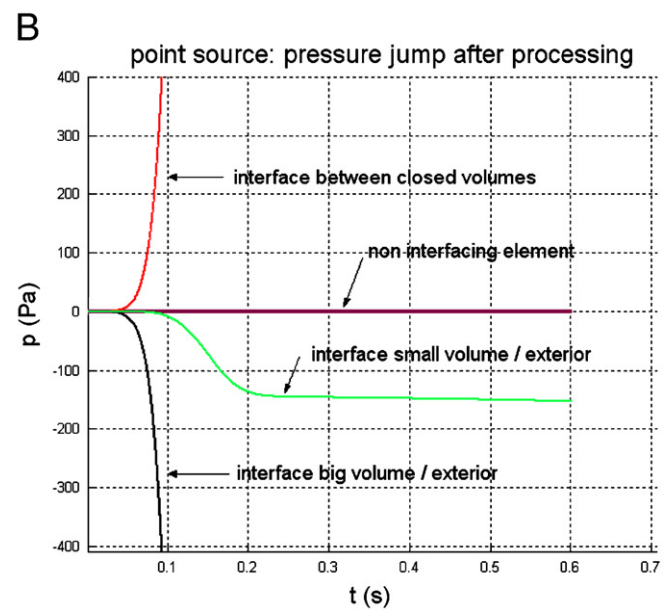
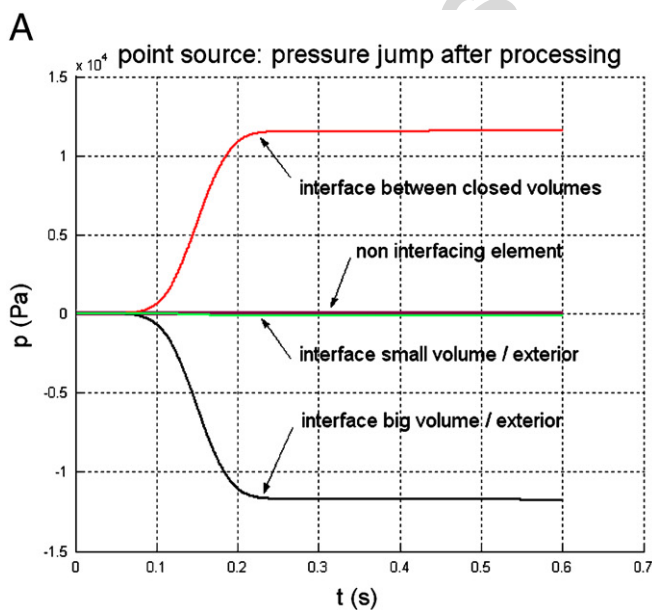


Fig. 16. MAQSATH, pressure jump on elements 1,400,700 and 1050 for an acoustic source placed inside the big volume, after processing. The right view is an expansion of the left view (see scales).

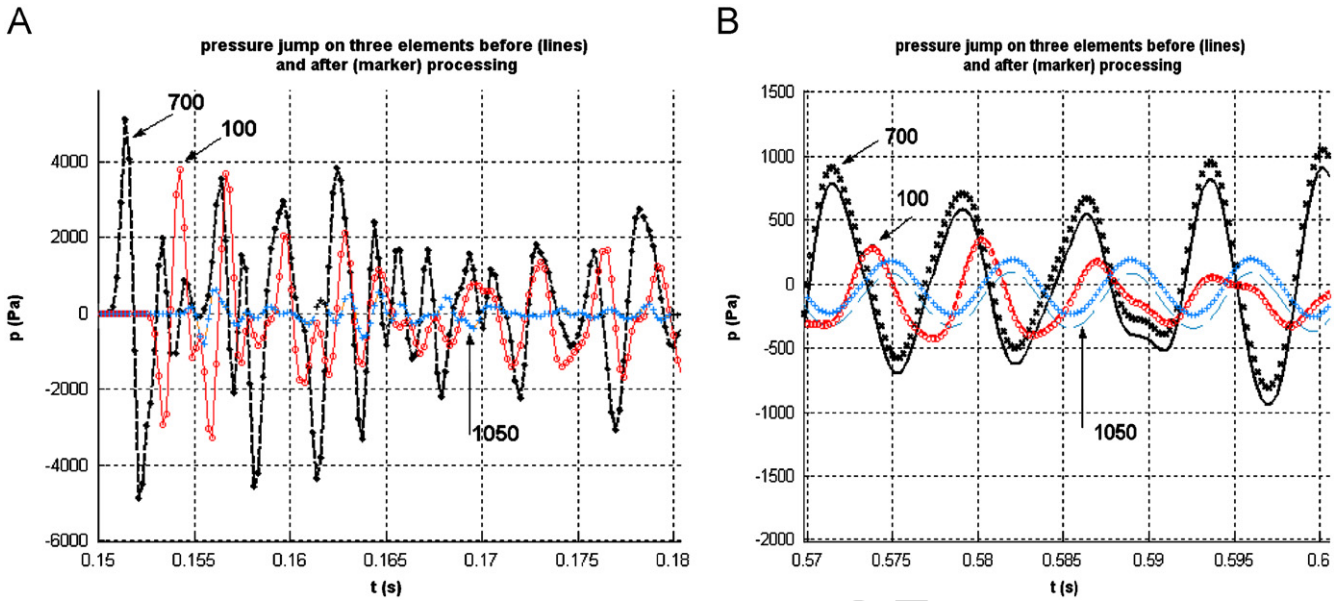


Fig. 17. MAQSATH, comparison of responses before and after processing for a short excitation.

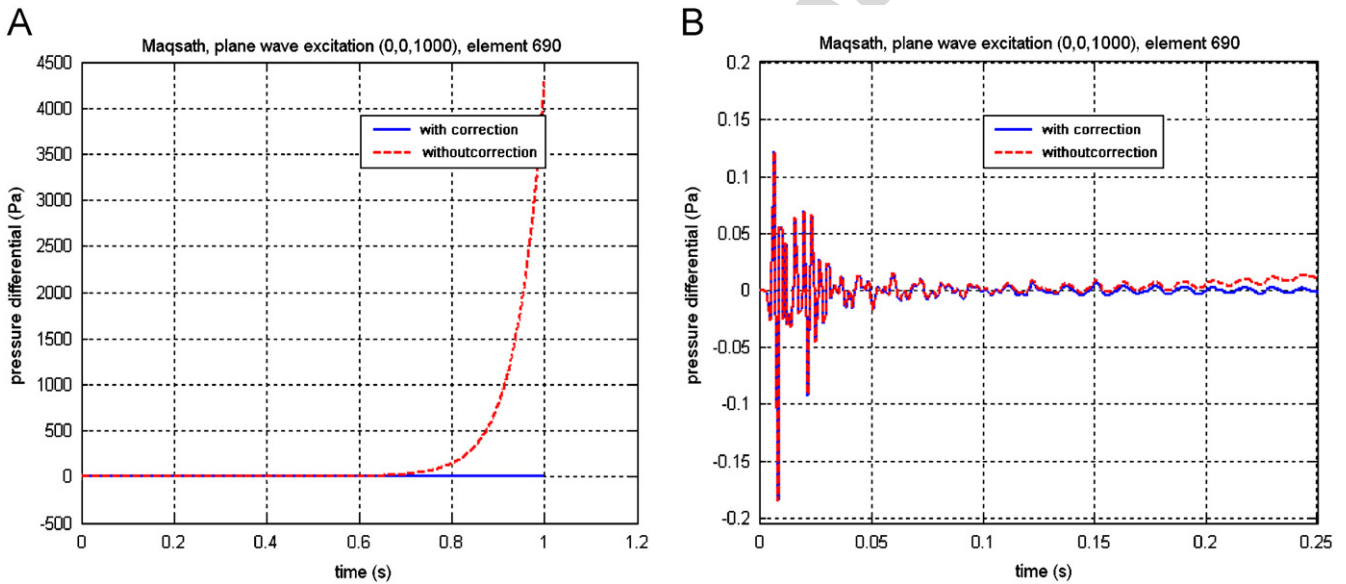


Fig. 18. Coupled vibro-acoustic MAQSATH, comparison of response before and after processing.

- An independent disc: carbon fibre/honeycomb ‘sandwich’ with a thickness of 0.043 m, a total mass of 46 kg, and a surface density of 9.38 kg/m². First ‘in vacuo’ modes lie at 31, 33, 61 and 81 Hz. Structural damping has a value 1%.

Calculations are performed over a duration of 1 s, in order to validate the non-divergent character of the responses obtained with the correction applied on the matrix of the linear system solved at each time step.

The pressure jump on an element located at the centre of the panel between the two cavities is represented on Fig. 18.

The plot on the left-hand side of the figure presents the complete responses from 0 to 1 s. It shows the disappear-

ance of the divergence, particularly important for this element, due to the modification of matrix $[M]$.

The plot on the right shows an enlarged view of the beginning of the curve: one can note that the response, prior to the influence of the divergence, is the same with and without correction. This result shows that the correction is also operational for a coupled vibroacoustic calculation.

6. Discussion and conclusion

In this paper, we have shown that the “thin element” hypersingular time formulation has “pneumatic” eigenmodes at zero frequency when closed cavities are present.

These modes may exhibit numerical instability, which is indeed observed with the algorithm that we used.

In spite of small growth rates, these modes are troublesome for calculations over long time periods. To get rid of this instability, we have proposed and implemented a non-disturbing pre-processing technique. This technique affects the matrix related to the current time of the discretised time formulation. This matrix is independent of time and is of purely geometric nature. It is modified so that all eigenvalues of a global matrix that are initially close to zero are made equal to zero. The global matrix depends on interinfluence coefficients both at the current time step and at retarded time steps. Selecting the eigenvalues is easy, since these are the N smallest eigenvalues.

The solution used here does not present any difficulty for the calculation. Calculations are very fast since only the N smallest eigenvalues and their eigenvectors need to be calculated. It was applied to three examples: a cube, two cubes and a two-cavity structure. A strong decrease of the instability was observed on all three examples, which was sufficient for the current practical needs (accurate spectrum calculation for time responses).

A slight tendency to divergence still can be noted, which calls for further refinement of the technique in the future. This technique preserves the dynamic behaviour reasonably well, other modes being very little altered. The algorithm was implemented into the ASTRYD code.

Theory shows that the correction carried out is valid only in an approximate way, and within a first-order approximation. This explains why a slight tendency to divergence on the results can still be noticed. This work requires further research by a more thorough and more rigorous use of the generalised eigenvalue problem of polynomial form that constitutes a complete acoustic representation of the object. This formulation contains all physical and numerical characteristics of the problem. In particular, its eigenmodes are physical–numerical eigenmodes. This is a very interesting area of investigation for both model improvement and exploitation. This work is part of important improvements that can still be brought to the technique of retarded potential hypersingular time integral equations [21], the suitability of which to industrial situations has been evidenced for a long time.

Acknowledgements

We would like to acknowledge Jean-Yves Disson (Oldb-Metravib) for his active contribution and advice, and Michel Henry, from the same company, for his help in the software developments. The CNES (Centre National d'Etudes Spatiales) is also gratefully acknowledged for its financial support.

Appendix A

In this appendix, we give the way of obtaining Eq. (2.4) from Eq. (2.2). With relationship (A6) in appendix of [7],

Eq. (2.2) can be written as

$$\begin{aligned} -4\pi\rho_0\ddot{w}(M_0) = & \text{FP} \sum \iint_{\partial n_{M_0}} (d) \frac{\partial}{\partial n_M} (d) \\ & \times \left[\frac{\Delta\ddot{p}^*}{c^2 d} + \frac{\Delta\dot{p}^*}{cd^2} + \frac{\Delta p^*}{d^3} \right] ds \\ & + \text{FP} \sum \iint (\vec{n}_{M_0} \vec{n}_M) \left[\frac{\Delta\dot{p}^*}{cd^2} + \frac{\Delta p^*}{d^3} \right] ds \\ & - \frac{4\pi}{r} \left(\frac{\dot{S}^*}{c} + \frac{S^*}{r} \right) \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} (r). \end{aligned}$$

A.1. Space discretization

Let us now assume that the body is composed of an assembly of planar elements and that function Δp (pressure jump) is spatially piecewise constant, i.e., constant on each polygonal element (“ C^0 in space” hypothesis). From here we use the following *notation*, useful for future matrix formulation:

- subscript i denotes the reference element;
- subscript j denotes elements of the mesh interacting with element i ;
- M_i is the centroid of element T_i and the origin of local polar coordinates (ρ, θ) ;
- T_i has a boundary described in local polar coordinates by function $\rho = b_i(\theta)$;
- M is the current integration point, belonging to element j , and associated to infinitesimal surface ds .

It is easy to show that the first integral possess a weak singularity on a curved element. Moreover, when the curvature vanishes, the limiting value of the integral over the element is zero. Therefore the above equation can be rewritten as:

$$\begin{aligned} -4\pi\rho_0\ddot{w}(M_i) = & \sum_{j \neq i} \iint_{T_j} \frac{\partial}{\partial n_{M_i}} (d) \frac{\partial}{\partial n_M} (d) \\ & \times \left[\frac{\Delta\ddot{p}^*}{c^2 d} + 3 \frac{\Delta\dot{p}^*}{cd^2} + 3 \frac{\Delta p^*}{d^3} \right] ds \\ & + \text{FP} \sum_j \iint_{T_j} (\vec{n}_{M_i} \vec{n}_M) \left[\frac{\Delta\dot{p}^*}{cd^2} + \frac{\Delta p^*}{d^3} \right] ds \\ & - \frac{4\pi}{r} \left(\frac{\dot{S}^*}{c} + \frac{S^*}{r} \right) \frac{\partial}{\partial n_{M_i}} (r). \end{aligned} \quad (\text{A1})$$

A Cauchy principal value is associated with the time derivative of pressure jump in the second integral, but its value is easily shown to be zero when using the “ C^0 in space, C^1 in time” hypothesis. Based on Formula (A7) in Ref. [7], one can write for the Hadamard finite part an approximate formula, the accuracy of which is better when

the element T_i is smaller:

$$\text{FP} \sum_j \iint_{T_j} \left[\frac{\Delta \dot{p}^*}{cd^2} + \frac{\Delta p^*}{d^3} \right] ds = -\frac{2\pi}{c} \Delta \dot{p}(M_i) - \oint_{\partial T_i} \frac{\Delta p^*}{b_i} d\theta + \sum_{j \neq i} \iint_{T_j} \left[\frac{\Delta \dot{p}^*}{cd^2} + \frac{\Delta p^*}{d^3} \right] ds, \quad (\text{A2})$$

where $\oint_{\partial T_i} f(\theta) d\theta$ denotes the integral of function $f(\theta)$ along the boundary of element i , for θ varying from 0 to 2π in local polar coordinates. This expression for the finite part is consistent with textbooks on the subject—see for example [22, chapter 8]—and with pioneer work of Kawai and Terai [23].

Using Formulae (A1) and (A2), and grouping together sources in the second term:

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{c} \Delta \dot{p}(M_i) + \oint_{\partial T_i} \frac{\Delta p^*}{b_i} d\theta \\ & - \sum_{j \neq i} \iint_{T_j} \frac{\partial}{\partial n_{M_i}}(d) \frac{\partial}{\partial n_M}(d) \left[\frac{\Delta \dot{p}^*}{c^2 d} + 3 \frac{\Delta \dot{p}^*}{cd^2} + 3 \frac{\Delta p^*}{d^3} \right] ds \\ & - \sum_{j \neq i} \iint_{T_j} (\vec{n}_{M_i} \vec{n}_M) \left[\frac{\Delta \dot{p}^*}{cd^2} + \frac{\Delta p^*}{d^3} \right] ds \\ & = 4\pi \rho_0 \ddot{w}(M_i) - \frac{4\pi}{r} \left(\frac{\dot{S}^*}{c} + \frac{S^*}{r} \right) \frac{\partial}{\partial n_{M_i}}(r). \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

Eq. (A3) is transformed thanks to derivative formulae, which are valid when using the “C° in space” hypothesis:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{c} \Delta \dot{p}^* \frac{\partial d}{\partial \rho} &= \frac{\partial(\Delta p^*)}{\partial \rho}, \\ -\frac{1}{c} \Delta \dot{p}^* \frac{\partial d}{\partial \rho} &= \frac{\partial(\Delta \dot{p}^*)}{\partial \rho}. \end{aligned}$$

The latter formula allows the suppression of the pressure jump second derivative $\Delta \dot{p}^*$ in (A3). Both formulae allow, due to the $\partial/\partial \rho$ radial derivatives, to convert element surface integrals into line integrals in respect to θ .

After some amount of transformation, the following synthetic expression is obtained from (A3):

$$\begin{aligned} & \frac{2\pi}{c} \Delta \dot{p}(M_i) + \oint_{\partial T_i} \frac{\Delta p^*}{b_i} d\theta \\ & - \sum_{j \neq i} \oint_{T_j} U(M_i, M, \vec{n}_{M_i}, \vec{n}_M) \Delta p^* d\theta \\ & - \sum_{j \neq i} \iint_{T_j} V(M_i, M, \vec{n}_{M_i}, \vec{n}_M) \Delta p^* ds \\ & - \frac{1}{c} \sum_{j \neq i} \iint_{T_j} W(M_i, M, \vec{n}_{M_i}, \vec{n}_M) \Delta \dot{p}^* d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{c} \sum_{j \neq i} \iint_{T_j} Z(M_i, M, \vec{n}_{M_i}, \vec{n}_M) \Delta \dot{p}^* ds \\ & = 4\pi \rho_0 \ddot{w}(M_i) - \frac{4\pi}{r} \left(\frac{\dot{S}^*}{c} + \frac{S^*}{r} \right) \frac{\partial}{\partial n_{M_i}}(r). \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

U , V , W , Z are explicit functions of the geometric characteristics of the elements and of the point M .

A.2. Time discretization

Let us now introduce variable $Q = \Delta t \Delta \dot{p}$. Δt is the time step. The latter variable Q has the advantage, hereafter, of having the same dimension as the original unique value Δp . (A4) can be written:

$$\begin{aligned} & Q(M_i) + \frac{c \Delta t}{2\pi} \oint_{\partial T_i} \frac{\Delta p^*}{b_i} d\theta \\ & - \frac{c \Delta t}{2\pi} \sum_{j \neq i} \oint_{T_j} U(M_i, M, \vec{n}_{M_i}, \vec{n}_M) \Delta p^* d\theta \\ & - \frac{c \Delta t}{2\pi} \sum_{j \neq i} \iint_{T_j} V(M_i, M, \vec{n}_{M_i}, \vec{n}_M) \Delta p^* ds \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i} \oint_{T_j} W(M_i, M, \vec{n}_{M_i}, \vec{n}_M) Q^* d\theta \\ & - \frac{1}{2\pi} \sum_{j \neq i} \iint_{T_j} Z(M_i, M, \vec{n}_{M_i}, \vec{n}_M) Q^* ds \\ & = 2c \Delta t \rho_0 \ddot{w}(M_i) - \frac{2c \Delta t}{r} \left(\frac{\dot{S}^*}{c} + \frac{S^*}{r} \right) \frac{\partial}{\partial n_{M_i}}(r). \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

To solve (A5) numerically, the pressure jump Δp and the auxiliary function Q are sought at fixed time steps, $n \Delta t$. In a marching-on-time algorithm, the values of Δp and Q at preceding time steps ($n-1$, ..., $n-k$) are assumed to be known.

We note Δp_j^n , Q_j^n our unknowns at time $n \Delta t$ on element j .

The evaluation of (A5) integrals, where the integrands depend only on the retarded time and on geometric data, is made by assuming that, on each element j for each time step n , the functions $\Delta p(M, t_n - d/c)$ and $Q(M, t_n - d/c)$ are piecewise linear functions of d , which satisfy the relationships:

$$\forall M \in T_j, \quad \Delta p(M, t_n - l \Delta t) = \Delta p_j^{n-l},$$

$$Q(M, t_n - l \Delta t) = Q_j^{n-l}.$$

This hypothesis is important: instead of assimilating Δp^* on T_j with its linear extension from M_j , one takes into account variations of Δp^* due to the change of retarded time step when sweeping T_j . The consequence is that the unknown functions are C^1 in time for integrating over the T_j elements. Each integral in (A5) is the sum of the contributions of the different elements. The contribution of each element at a given time step includes several terms

coming from the different retarded time intervals where the unknowns are locally linear. In this way appear sums over retarded time indices l . The elementary component of the integrals in (A5), numbered (i, j, n, l) , is the integral over a part of a triangle T_j (the part affected by the retarded time interval l) of a geometric explicit function multiplied by the linear approximation of the unknown. Depending on whether the integral is a line or a surface integral, the part of T_j is a line or a surface. In all cases a careful numerical integration of the component is led by a Gauss procedure [24]. Finally, we obtain linear combinations of the unknowns at retarded times; they can be written in a matrix–vector product form:

$$Q_i^n - \frac{1}{2\pi} \sum_j \sum_{l \geq 0} E1_{ij}^{(l)} \Delta p_j^{n-l} - \frac{1}{2\pi} \sum_j \sum_{l \geq 0} E2_{ij}^{(l)} Q_j^{n-1} = 2c \Delta t \tilde{S}_i \quad (\text{A6})$$

with:

$$\tilde{S}_i = \rho_0 \ddot{w}_i^n - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n_{M_i}}(r) \left(\frac{\dot{S}^*}{c} + \frac{S^*}{r} \right).$$

The careful time integration is compliant with [17] and very close to [7]. It is related to the observed need for a non-elementary integration in frequency hypersingular formulation [11,12].

A second equation needs then to be associated with Eq. (A6), that relates Δp and Q directly:

$$\Delta p_i^n - \frac{1}{2} Q_i^n = \tilde{S} \tilde{Q}_i \quad \text{with} \quad \tilde{S} \tilde{Q}_i = \sum_{l=1}^{\infty} Q_i^{n-l}. \quad (\text{A7})$$

According to the classical trapezoidal rule approximation, (A7) is the discretisation of the natural relationship:

$$\Delta p_i(t_0) = \int_0^{t_0} \Delta \dot{p}_i(\tau) d\tau, \quad \Delta p_i(0) = 0.$$

After changing the time index n for the retarded time index l , according to formulae

$$\Delta p_i^{n-l} = \Delta p_i^{(l)}, \quad Q_i^{n-1} = Q_i^{(l)}$$

we get the following discretised formulation to be implemented:

$$Q_i^{(0)} - \frac{1}{2\pi} \sum_j \sum_{l \geq 0} E1_{ij}^{(l)} \Delta p_j^{(l)} - \frac{1}{2\pi} \sum_j \sum_{l \geq 0} E2_{ij}^{(l)} Q_j^{(l)} = 2c \Delta t \tilde{S}_i, \\ \Delta p_i^{(0)} - \frac{1}{2} Q_i^{(0)} = \tilde{S} \tilde{Q}_i. \quad (\text{A8})$$

References

- [1] Mitzner KM. Numerical solution for transient scattering from a hard surface of arbitrary shape—retarded potential technique. *J Acoust Soc Am* 1967;42:391–7.
- [2] Bluck MJ, Walker SP. Analysis of three-dimensional transient acoustic wave propagation using the boundary integral equation method. *Int J Num Methods Eng* 1996;39:1419–31.
- [3] Vaucher de la Croix D, Clerc C, Perret L. Vibroacoustic response prediction for spacecraft structures in medium frequency range using a time domain method. *Proceedings of the 4th international conference spacecraft structures & mechanical testing* 1994. p. 435–48.
- [4] Pradines A. Vibro-acoustic study of MAQSATH (ARIANE 502 Flight): Analysis, test and flight correlation. *Proceedings of the European conference on spacecraft structures materials & mechanical testing* 1998. p. 625–31.
- [5] Ha-Duong T, Ludwig B, Terrasse I. A Galerkin BEM for transient acoustic scattering by an absorbing obstacle. *Int J Num Methods Eng* 2003;57:1845–82.
- [6] Kirkup SM. The computational modelling of acoustic shields by the boundary and shell element method. *Comp Struct* 1991;40(5): 1177–83.
- [7] Ergin AA, Balasubramanian S, Michielssen E. Analysis of transient wave scattering from rigid bodies using a Burton-Miller approach. *J Acoust Soc Am* 1999;106(5):2396–404.
- [8] Ergin AA, Balasubramanian S, Michielssen E. Fast transient analysis of acoustic wave scattering from rigid bodies using a two-level plane wave time domain algorithm. *J Acoust Soc Am* 1999;106(5): 2405–16.
- [9] Amini S, Kirkup SM. Solution of Helmholtz equation in the exterior domain by elementary boundary integral methods. *J Comp Phys* 1995;118:208–21.
- [10] Guiggiani M, Krishnasamy G, Rudolphi TJ, Rizzo FJ. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. *J App Mech—Trans ASME* 1992;59:604–14.
- [11] Jeans R, Mathews IC. A comparison of numerical collocation and variational procedures to the hypersingular acoustic integral operator. *Comp Methods App Mech Eng* 1992;101(1–3):5–26.
- [12] Liu YJ, Chen S. A new form of the hypersingular boundary integral equation for 3-D acoustics and its implementation with C^∞ boundary elements. *Comp Methods Appl Mech Eng* 1999;173:375–86.
- [13] Rynne BP, Smith PD. Stability of Time marching Algorithms for the Electric Field Integral Equation. *J Electromag Waves and Appl* 1990;4(12):1181–205.
- [14] Davies PJ, Duncan DB. Averaging techniques for time-marching schemes for retarded potential integral equations. *Appl Numer Math* 1997;23:291–310.
- [15] Davies PJ, Duncan DB. On the behaviour of time discretisation of the electric field integral equation. *Appl Math Comp* 2000;107:1–26.
- [16] Gaul L, Kogl M, Wagner M. *Boundary element methods for engineers and scientists*. Berlin/Heidelberg: Springer; 2003.
- [17] Lavie A, Dubus B, El Ghauty A. Acoustic scattering in time-domain using the boundary elements. *Proceedings of the 5th Congres francais d'acoustique*. Lausanne: Presses polytechniques et universitaires romandes 2000.
- [18] Eder J, Miühlbauer K. The Very Specific MAQSAT payloads of ARIANE 502. *Spacecraft structures, materials and mechanical testing*. *Proceedings of the European conference on spacecraft structures materials & mechanical testing* 1998. p. 570–75.
- [19] Liu YJ, Rizzo FJ. A weakly singular form of the hypersingular boundary integral equation applied to 3-D acoustic wave problems. *Comp Methods in Appl Mech Eng* 1992;96:271–87.
- [20] Chatelin F. *Spectral approximation of linear operators*. London: Academic Press; 1983.
- [21] Araujo FC, Alberto DR, Dors C. Analysis of 3-D time dependent acoustic problems via a generic BE substructuring algorithm based on iterative solvers. *Eng Anal Bound El* 2003;27(7):705–16.
- [22] Appel W. *Mathematiques pour la physique et les physiciens*. Paris: H&K Editions; 2002.
- [23] Kawai Y, Terai T. A numerical method for the calculation of transient acoustic scattering from thin rigid plates. *J Sound Vib* 1990;141(1):83–96.
- [24] Abramovitz M, Stegun IA. *Handbook of mathematical functions*. New-York: Dover Publications; 1972.



Localizing impulse sources in an open space by time reversal with very few transducers

J.-M. Parot *

*Laboratoire de Mécanique et Ingénieries, Institut Français de Mécanique Avancée et Université
Blaise Pascal, BP 265, Campus de Clermontlles Cézeaux 63175 Aubière, France*

Received 6 April 2006; received in revised form 30 November 2006; accepted 30 November 2006

Abstract

Localizing impulse point sources is a problem of major practical importance for numerous applications in security or equipment monitoring. It is difficult to solve when posed in a strongly congested propagation medium. This paper concerns the case where, in an open space, obstructing bodies are of a sufficient size and number to impede reception of certain direct paths from the source to the receivers. They produce reflected or diffracted paths. A low number of point receivers is used, 2–5, depending on the case. This fits practical constraints one meets in the field. The localization principle being time reversal, the aim is therefore to model the time reversed signal propagation from the receivers. From a direct signal obtained from measurements or computer simulations, the reversed propagation computation is made in the frequency domain or in the time domain. Despite the low number of receivers, which we would expect not to give good refocusing of the reversed wave, we are able in each case to localize the source with a conveniently chosen criterion, based on the time shortness of the signal. The advantage of this technique is its simplicity and speed: in a time formulation, a unique computation allows the localization. This result opens the way to economical measurement techniques for localizing impulse sources in congested or disturbed media, as long as a propagation model allowing integration of refraction, diffraction and reflection effects is available.

© 2006 Published by Elsevier Ltd.

Keywords: Acoustic source; Inverse problem; Holography; Inverse boundary method; Time reversal

* Tel.: +33 4 73 28 80 18; fax: +33 4 73 28 81 00.

E-mail address: parot@ifma.fr.

1. Introduction

In many practical situations, it is necessary to localize an impulse source using few sensors. The source is generally not in a direct view from a whole antenna. This configuration is met for example in defence applications [1]: the localization of shot departure in a hilly relief or in an urban area, where buildings are obstacles to direct propagation; but in the industrial context too: there might be interest to locate a shock inside a casing or a tank, the propagation being elastoacoustic in nature, or elastic and constrained to take place in the solid casing.

In applications such as those described, and with few sensors near the ground, it is likely that localization has to be made with no sensor in direct view from the source.

In the present paper, we restrict the problem to the following, somewhat less general (no fluid–structure coupling, exterior problem only): we want to find the place of a quasi-point impulse source; the geometric features of the rigid bodies involved are known, as is the pressure time history measured by the sensors. In realistic situations, a fast processing of the sensor data is mandatory. We must have at our disposal a technique leading quickly to the result by exploiting all the available data. In the present paper, processing is proposed in order to reach this goal. In spite of its conceptual simplicity, it does not appear to have been previously presented in detail.

It is therefore difficult to make a ‘state of the art’ on this subject. Nevertheless, we can highlight its links with some well established issues in acoustics:

- three-dimensional holography,
- broad band processing, sparse arrays and ‘Matched-field processing’,
- time reversal.

Let us have a look at these different topics:

1.1. Three-dimensional holography

The classical holography techniques (Near Field Acoustic Holography, NAH), based on a dense covering array assumption [2], are excluded for practical reasons. On the other hand, clearly our technique is not very different from a holographic 3D imaging with diffraction computation. Some work was conducted using such a technique, known as the IBEM (Inverse boundary element method) [3–5]. For example, the 3D holography by IBEM was used to find the vibration field on the body surface (rather than projected on a fictitious plane) for analyzing the noise source on a tyre close to the ground contact area [6,7].

An alternative way is to determine the sound pressure by an expansion on a set of orthogonal basis functions that are solutions to the Helmholtz equation [8]. In the Helmholtz Equation Least Squares (HELs) method, the coefficients associated with these basis functions are determined by a collocation method with errors minimized by the least-squares method [9,10].

Our technique however differs from the preceding ones by the very small number of sensors used. We do not wish to sample any measurement surface. This reduction is possible on condition that broad band operation and a source shape assumption are used (see below).

The number of sensors may (eventually) be reduced to unity. Moreover, the classical problem of bad conditioning of inverse problems is avoided; the spurious near field components of the solution are, in fact, eliminated if we make an assumption on the shape of the acceleration distribution, for example, if we assume that it has a constant value on the source element and zero elsewhere.

1.2. *Broad band processing, sparse arrays and 'Matched-field processing'*

The idea of compensating for the poor array with a rich frequency signal is known and used in underwater acoustics [11] and geoacoustics [12]. In [11], the authors find with one sensor the range and depth of one source, with 10% error on range and 25% on depth. In [13], the authors state that incoherent averaging over multiple frequencies allows localization which would be impossible with narrow-band processing.

The 3D holography described above is based on knowledge of the geometry of scattering obstacles. In other words, the (heterogeneous, perturbed) propagation medium is known, and its features are integrated in the localizing process. The same philosophy underlies the 'Matched-field processing' [14]. In the framework of this approach, the source position derived from the array measurements is searched by an optimization procedure on a model of the medium. The interesting point here is the following: the heterogeneous, complex environment, modelled in the computation, contributes complementary information in respect to the single antenna. In this way, a vertical array can acquire a lateral resolution [14]. Physically, this is obtained through parameters such as number, directions and relative delays of different paths. The 'Matched-field processing' leads to heavy computations, since one has to simulate the effect of a high number of sources which mesh the volume (or in our case the surface) in a realistic environment, before being able to choose the best one for matching the measurements. The counterpart of the economical antenna is an intensive use of propagation modelling.

1.3. *Time reversal*

In the same way, the IBEM technique needs to solve a big linear system. To avoid this drawback, we turned to the time reversal method. Its principle is to use the sensors as emitters generating a time reversed signal. Their array is then named 'time reversal mirror'. In our application, this reversed propagation is done by computer simulation. Many experiments and theoretical developments [15,16] show that with an array of sufficient density and span, the reversed signal is focalized on the original source. Obviously, a perfect focalization would demand a totally covering array, which is practically excluded. In the present work, we will test whether this idea can be applied by processing simple but non-obvious situations: a point source surrounded by buildings or a spherical radiating surface in an open space.

The results obtained on the source localization by time reversal concern:

- Either dense antennas in an open medium [17]. In an open space, the time reversal mirror shows increasingly high performances when the propagation medium contains heterogeneities. This improvement in resolving power is due to the secondary paths which have a real impact on the result. It is the same phenomenon as mentioned in the 'Matched-field processing' context. Here, the forward signal carries the information

about the medium. In reversed propagation, the information is, in some way, used to lead to focalizing on the source. The registered focalizing is better with the obstacles than without: the obstacles enlarge the antenna. In terms of reflection, it can be said that the bodies create virtual receivers, which are in reversed emission thus creating supplementary sources enlarging the antenna size. This virtual enlargement is easily observed using plane reflectors and sources radiating time Dirac-shaped signals. See [Appendix](#). The virtual image receivers, useful for enlarging the mirror, are harmful because they create a “noise”. The examples in [Appendix](#) are very clear in this respect. If we wish to avoid this noise, it is necessary to use a multi-transducer mirror. Then the returned parasitic signals would be destroyed by interference, according to Huyghens principle and to the Helmholtz integral formula.

- Or a single sensor taken as a time reversal mirror in a reverberant cavity. For example, in [16] an experiment is shown, where a point source radiates inside a perfectly closed 2D cavity. In this laboratory experiment, the absorption is very weak. The antenna is restricted to a single transducer. Due to the multiple reflections, there is a huge amount of virtual receivers. This explains the astonishing fact that time reversal with a single transducer mirror gives a perfect localization result. The signal from the sensor focalizes on the source, thanks to the many reflections on the boundary of the cavity.

The common advantage in both situations is an excellent refocusing, due to the virtual enlargement of the mirror produced by obstacles and reflecting boundaries [18,19]. In each case, the performance is better than that of a classical array with the same number of sensors. This increase in resolution is called ‘super-resolution’ [20]. It is further strengthened by the supplementary acoustic paths between source and array.

Our context is an intermediate one between both extreme cases of time reversal. It is distinguished by a very low number of scatterers and by a definitely poor antenna (mirror). That is the reason why we are led to make broad band processing and to use ‘super-resolution’ as far as possible. The feasibility of the time reversal approach is supported by the fact that, in the past, it enabled high quality processing (robust in respect to noise and measurement errors. See [21,22]) for some problems usually processed by classical inverse approaches.

Our purpose is to show using examples that, when using a well adapted criterion, the method is operational for low frequency measurements and different propagation models.

In the following sections, we will return to the formulation in an open space without obstacles (Sections 2.1, 2.2), and present the compactness criterion (Section 2.3). Then a 2D simulation using rays is outlined (Section 3.1), followed by a 3D retarded potential simulation (Section 3.2), and an experiment processed in the frequency domain (Section 3.3).

2. Principles and formulas

2.1. Principle

The sound propagation equation (d’Alembert’s wave equation with rigid bodies and no loss in the medium) does not vary by time reversal. Due to the second derivative in respect to time, if $f(\mathbf{x}, t)$ is a solution, then $f(\mathbf{x}, -t)$ is also a solution. This implies that if a $S(\mathbf{x}, t)$ evolution in the source area generates a $R(\mathbf{x}, t)$ evolution in the receiver area, a $R(\mathbf{x}, -t)$ evolution in the receiver area will generate a $S(\mathbf{x}, -t)$ evolution in the source area ([Fig. 1](#)). Let us assume the source and the receiver area to be boundaries of the domain. The receiver area is

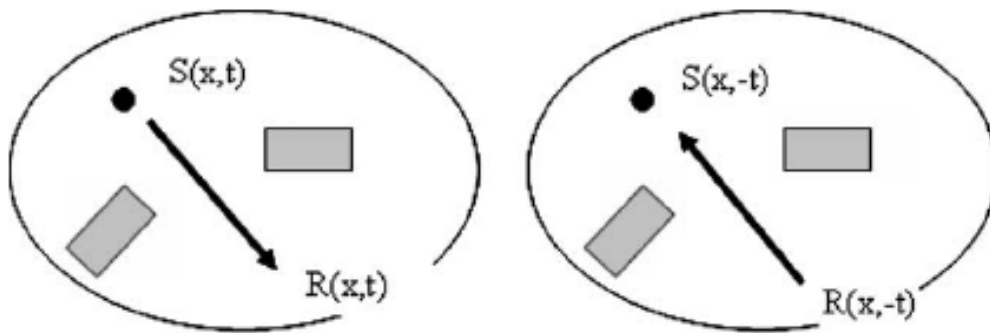


Fig. 1. Principle of time reversal.

a closed surface surrounding the domain, and the source area is reduced to a point-like very small sphere. It is sufficient to replay the $R(x, -t)$ record on the receiver boundary to obtain a focalization on the source. It is identified as a maximum signal spot.

In real conditions, the receiver area is replaced by a discrete antenna. It is made up of a group of transducers. The “replay” of the direct wave is for this reason only approximate. It is the cause of the spurious parts of the reversed signal (see [Appendix](#)). Nevertheless, Fink’s works show the reliability of the method when the antenna is not too small. In his examples, the antenna comprises between 20 and 96 transducers.

2.2. Point source in an open space

Although we are interested in time evolutions, we will set up some relations for point sources and receivers in the frequency domain. The time reversal method is also used in the frequency domain. It is then called ‘phase conjugate method’. We develop this point here only because of the link with time evolutions through the Fourier Transform.

The source S_0 generates the signal $S(t)$, whose Fourier Transform is $\hat{S}(\omega)$.

At the receiver R_n ($n = 1, \dots, N$), $p_n(t)$ is measured, whose Fourier Transform is $\hat{p}_n(\omega)$. $\hat{p}_n(\omega) = T_n(\omega)\hat{S}(\omega)$, with T as the transfer function for a point source in an open space

$$T = \frac{\exp(-ikr_n)}{4\pi r_n}$$

where r_n is the distance from the source to R_n (Fig. 2).

The time reversed signal emitted by the transducer is obtained by changing the sign of t , and hence in the formulas of the frequency domain by replacing i by $-i$, its complex conjugate. This is a consequence of the Fourier Transform definition for a real signal.

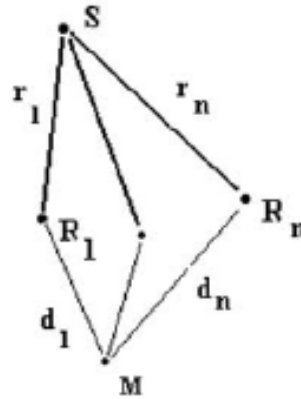
The time reversed signal is then

$$\overline{T(\omega)\hat{S}(\omega)}$$

or

$$\overline{\hat{S}} \frac{\exp(ikr_n)}{4\pi r_n}$$

This signal is propagated using the usual transfer function for a point source. Hence at point M , situated at a distance d_n from the various points R_n , the following signal $\hat{u}_n(\omega)$ is measured, coming from the n th transducer radiating in reversed time

Fig. 2. Sketch for computing the time reversed field in M .

$$\hat{u}_n(\omega) = \bar{S} \frac{\exp(ikr_n)}{4\pi r_n} \frac{\exp(-ikd_n)}{4\pi d_n} = \bar{S} \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{(4\pi)^2 r_n d_n}$$

The total pressure from all transducers is therefore

$$\hat{u}(\omega) = \sum_{n=1}^N \bar{S} \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{(4\pi)^2 r_n d_n} = \frac{\bar{S}}{(4\pi)^2} \sum_{n=1}^N \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{r_n d_n} \quad (2.1)$$

formula in agreement with [20].

For a Dirac-shaped signal, the total reversed field is

$$\hat{u}(\omega) = \frac{1}{(4\pi)^2} \sum_{n=1}^N \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{r_n d_n} \quad (2.2)$$

In an area where r_n and d_n have approximately the same size and where the wavelength λ is small in respect to these distances ($r_n \approx d_n \gg \lambda$) (i.e. distant from the transducers), formula (2.2) attains a maximum modulus when the terms of the sum have the same phase

$$r_n = d_n + K \quad \text{for every } n \quad (2.3)$$

If constant K is null, (2.3) is satisfied in S_0 . If constant K has a non-zero value, (2.3) defines the intersection of N spheres, a problem for which no solution can be found in most cases when N is above 3.

The reversed pressure field shows consequently a local maximum value on the source location, which is built by interferences. Clearly this local maximum is not necessarily unique. For example, if the transducers lie in a plane, a symmetrical place to S_0 complies obviously with the condition (2.3). With less than 4 points R_n in the 3D space, whatever their position, more than one place satisfies the condition (2.3). The image produced by mapping the modulus of $\hat{u}(\omega)$ may comprise the real source and other spurious sources.

2.3. Compactness criterion

We wish to obtain a function valued on the locus of the source, whose value is a good indicator of the source localization. An attempt to use an ‘energy criterion’, based on the norm of the signal, was unsuccessful. The noise due to the out of phase components of the reversed field made the image very fuzzy. Moreover, the image was strongly perturbed in

the vicinity of the sensors. Best results were computed by ignoring the geometric divergence (or spherical) attenuation in the reversed propagation, but in a complicated geometry, this technique would be difficult to implement.

Physically speaking, it is known [17] that focalizing on an impulse source implies that many of the different paths forming the trail of the direct wave must cross at the source. From that comes the idea to base the criterion pointing the source on the time compactness of the signal. An efficient criterion was obtained by computing the time range of the signal. At each point, we see the signal as a probabilistic distribution of the 't' random variable, where its normalized squared pressure is the probability density. We compute the variance of this distribution. It has the dimension of a squared time. The lower the variance, the shorter the signal. This is the reason why we call this criterion the 'compactness' criterion.

The measured time signal is $u(t)$.

Its barycenter is t_0 , defined by

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} t u^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt}$$

The variance is

$$V = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (t - t_0)^2 u^2(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt} \quad (2.4)$$

In the following, we will need a frequency formula for V . It is derived from Parseval's formula, with $\hat{u}(\omega)$ being the Fourier Transform of $u(t)$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}|^2 d\omega \\ \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 u^2(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\hat{u}}{d\omega} \right|^2 d\omega \\ V &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\hat{u}}{d\omega} \right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{u}|^2 d\omega} \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.3.1. Source in an open space

It is easy to show that V is a pertinent indicator for the source in an open space with N receivers as in Section 2.2

From Eq. (2.1) we obtain

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}}{d\omega}(\omega) &= i \frac{\bar{S}}{(4\pi)^2 c} \left[\sum_{n=1}^N (r_n - d_n) \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{r_n d_n} \right] + \frac{1}{(4\pi)^2} \\ &\quad \times \frac{d\bar{S}}{d\omega} \left[\sum_{n=1}^N \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{r_n d_n} \right] \end{aligned} \quad (2.6)$$

At the source location, $r_n = d_n$ for every n .

Fourier Transforms of the variable u and its derivative have then the values

$$\hat{u}(\omega)|_S = \frac{\widehat{S}}{(4\pi)^2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{r_n d_n} \quad \text{and} \quad \frac{d\hat{u}}{d\omega}|_S = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{d\widehat{S}}{d\omega} \sum_{n=1}^N \frac{1}{r_n d_n}$$

The value of V is

$$V|_S = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{d\widehat{S}}{d\omega} \right|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{S}|^2 d\omega} = T^2,$$

where the squared time duration of the signal $S(t)$ is estimated by variance from (2.4) and (2.5).

Outside the source, we have

$$\begin{aligned} |\hat{u}(\omega)|^2 &= \frac{|\widehat{S}|^2}{(4\pi)^4} \left| \sum_{n=1}^N \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{r_n d_n} \right|^2 \\ \left| \frac{d\hat{u}}{d\omega} \right|^2 &= \frac{|\widehat{S}|^2}{(4\pi)^4 c^2} \left| \sum_{n=1}^N (r_n - d_n) \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{r_n d_n} \right|^2 + \frac{1}{(4\pi)^4} \left| \frac{d\widehat{S}}{d\omega} \right|^2 \left| \sum_{n=1}^N \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{r_n d_n} \right|^2 \\ &\quad + \dots + 2 \frac{1}{(4\pi)^4 c} \operatorname{Re} \left(i \widehat{S} \frac{d\widehat{S}}{d\omega} \sum_{n=1, m=1}^N (r_n - d_n) \frac{\exp(ik(r_n - d_n)) \exp(ik(d_m - r_m))}{r_n d_n r_m d_m} \right) \end{aligned}$$

After integration we obtain for V :

$$\begin{aligned} V &= T^2 + \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n=1}^N (r_n - d_n) \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{c r_n d_n} \right|^2 |\widehat{S}|^2 d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n=1}^N \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{r_n d_n} \right|^2 |\widehat{S}|^2 d\omega} + \dots + 2 \\ &\quad \times \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Re} \left(i \widehat{S} \frac{d\widehat{S}}{d\omega} \sum_{n=1, m=1}^N (r_n - d_n) \frac{\exp(ik(r_n - d_n)) \exp(ik(d_m - r_m))}{c r_n d_n r_m d_m} \right) d\omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} \left| \sum_{n=1}^N \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{r_n d_n} \right|^2 |\widehat{S}|^2 d\omega} \end{aligned} \quad (2.7)$$

With the assumption ‘signal duration small in respect to the cross time lags $(r_n + d_m - r_m - d_n)/c, n \neq m$ ’, we obtain from (2.7) after some computation an estimate of V :

$$V \simeq T^2 + \frac{\sum_{n=1}^N \left(\frac{r_n - d_n}{c r_n d_n} \right)^2}{\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{r_n d_n} \right)^2}$$

This formula shows that V can be statistically estimated by $V \simeq T^2 + \left\langle \left(\frac{r_n - d_n}{c} \right)^2 \right\rangle$, where $\left\langle \left(\frac{r_n - d_n}{c} \right)^2 \right\rangle$ is the mean of the squared time lags between forward and reversed paths, with some weighting depending on geometry. The conclusion follows: at any location different from the source, the ‘variance’ V is superior to its value at the source location, the squared signal duration.

We call ‘compactness criterion’ the $1/V$ parameter, which attains a maximum value at the source location, because several time components arrive in phase at this point: in the first example from [Appendix](#), two out of four components, in the second example 4 out of 16 components. The normed compactness criterion is

$$V|_S/V = \frac{1}{1 + \left\langle \left(\frac{r_n - d_n}{cT} \right)^2 \right\rangle} \quad (2.8)$$

The compactness criterion is theoretically validated in an open space.

2.3.2. Source and reflecting bodies

When the reflecting bodies are polyhedral, and with a high frequency assumption, the components emanate from the receivers and from the image receivers. It is still possible to roughly evaluate the emergence of the peak of $1/V$ at the source location, in respect to the current field value at any given point in the medium. The returned pressure is made up of two parts: one part will contribute to the peak at the source location; it is made up of the components which will arrive simultaneously at the source location. The second part may be considered as a random noise made from the out of phase components, arriving at random times at the source location. In our problem, with one or several bodies and few transducers, the number of components of each type is low. We call p the number of paths from source to receivers, d_n the reversed path length and r_n the forward path length. The reversed pressure field is then expressed as (2.1)

$$\hat{u}(\omega) = \frac{\bar{S}}{(4\pi)^2} \left[\sum_{n=1}^p \chi_n \frac{\exp(ik(r_n - d_n))}{r_n d_n} + \sum_{\substack{n,m \\ n \neq m}}^p \chi_n \chi_m \frac{\exp(ik(r_n - d_m))}{r_n d_m} \right] \quad (2.9)$$

The second sum assembles the noise components.

The coefficients χ_n take values 0 or 1. They account for the shadow effects of the bodies and for the inconsistency of some pairs of forward and reversed paths.

We process (2.9) and its derivative in the same way as for (2.1) and (2.6)–(2.8)

$$V \simeq T^2 + \frac{\sum_{n,m} \chi_n \chi_m \left(\frac{r_n - d_m}{c r_n d_m} \right)^2}{\sum_{n,m} \chi_n \chi_m \left(\frac{1}{r_n d_m} \right)^2} = T^2 + \left\langle \left\langle \left(\frac{r_n - d_m}{c} \right)^2 \right\rangle \right\rangle$$

where $\left\langle \left\langle \left(\frac{r_n - d_m}{c} \right)^2 \right\rangle \right\rangle$ is the mean over all possible paths of the squared time lags with some weighting depending on the geometry. The longer the time extent of the signal due to the multiple reflections, the higher the value of V . That is how we retrieve the ‘super-resolution’. Similarly to the preceding result:

$$V|_S/V = \frac{1}{1 + \left\langle \left\langle \left(\frac{r_n - d_n}{cT} \right)^2 \right\rangle \right\rangle}$$

3. Experiments, simulations and results

3.1. Reversed propagation by simplified rays: numerical experiments in a plane

Our purpose is here didactic. The simplified 2D model allows us to see how the time reversal works.

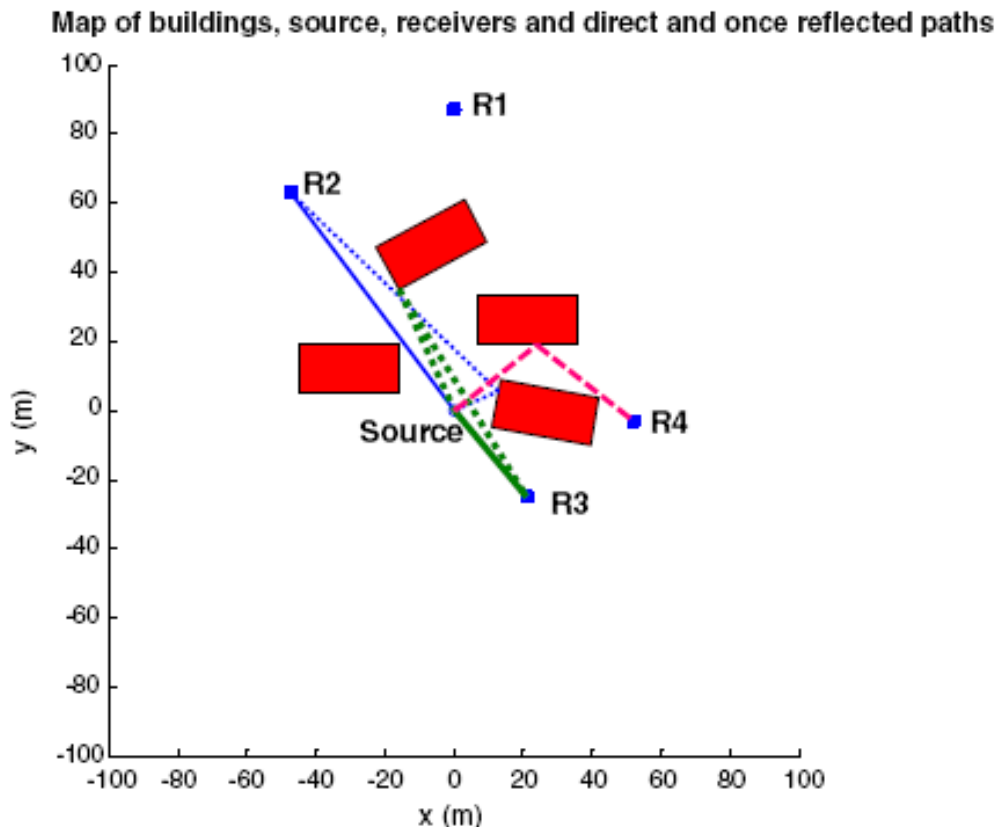


Fig. 3. Building map.

3.1.1. Map

The problem is set in a plane. Four rectangular buildings hinder propagation. Three transducers are effectively used for the time reversal technique. Five paths, two direct and three with a single reflection, link the source and the transducers: Fig. 3. More precisely:

- Building horizontal size: 29×14 m.
- Transducer number 1: no path.
- Transducer numbers 2 and 3: one direct and one reflected path each.
- Transducer number 4: only one reflected path.

We are close to the lower boundary for the antenna size. In a plane, we must have at least 3 paths, therefore 3 transducers in an open space (4 in some pathological cases). These minimum values require good knowledge of the arrival times.

3.1.2. Source signal

The radiated signal is a sinusoidal with an amplitude of 1 (Fig. 4). This shape was chosen because it is a simple one, with positive and negative values like the real signals to be processed.

3.1.3. Reversed signal, compactness criterion

We applied the compactness criterion $1/V$ (Eq. (2.5)) with the conditions:

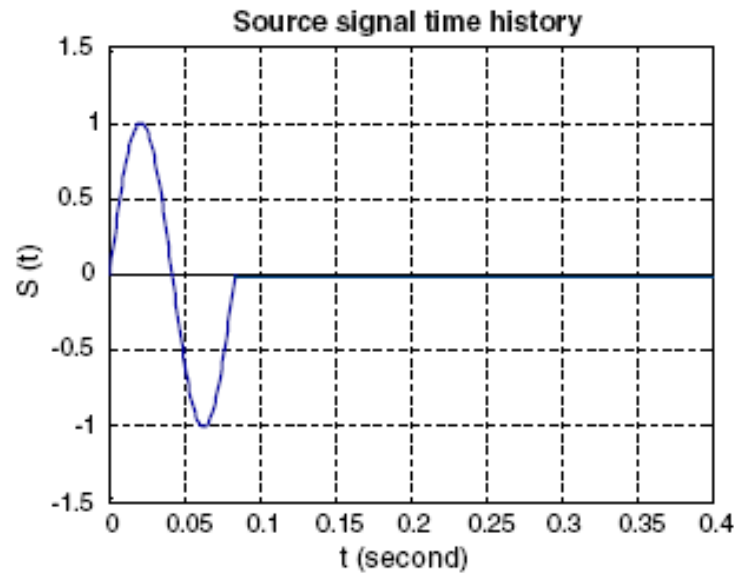


Fig. 4. Source signal.

- Sound speed = $c = 340$ m/s
- Mesh 30×24 , space step $dx = 3.3$ m
- Signal duration = $T = 1/12$ s,
- Time step = $dt = 1/120$ s,
- Length of the source signal in terms of space step $\frac{cT}{dx} \simeq 8.6$

The propagation was modeled in a simplified way, with the following assumptions: source situated on the ground, specular reflection, no diffraction, no reflection of an order equal to or higher than two, no absorption. The low dimension – wave number product of the problem is not in agreement with a ray propagation, but it allows to use a rough mesh, and the purpose in this section is a didactical one. When using the compactness criterion technique, the computation locates the source.

By neglecting the multi-reflected paths and the diffracted paths, we make an assumption, whose influence is not obvious. Possibly, these components would facilitate the localization, by increasing the amount of convergent energy.

The V computation is made in the time domain. The result for the $1/V$ map is drawn in Fig. 5. The scale is in dB. The arrow points to the real source location. The result is really good for the low number of sensors and the very low frequency range.

3.2. Reversed propagation by a time-marching algorithm: simulation on two polyhedras

In this section and in the following section, the source is forced to be situated on a scattering body surface.

In the present section, the scatterers are two cubic bodies. Their mesh is made of 1536 triangular elements (768 each). One element, which is located near an upper vertex, is moving with a Gaussian velocity. The sensors are all in the horizontal symmetry plane. Therefore, the information gathered by the sensors would be the same if they were on a planar reflecting surface.

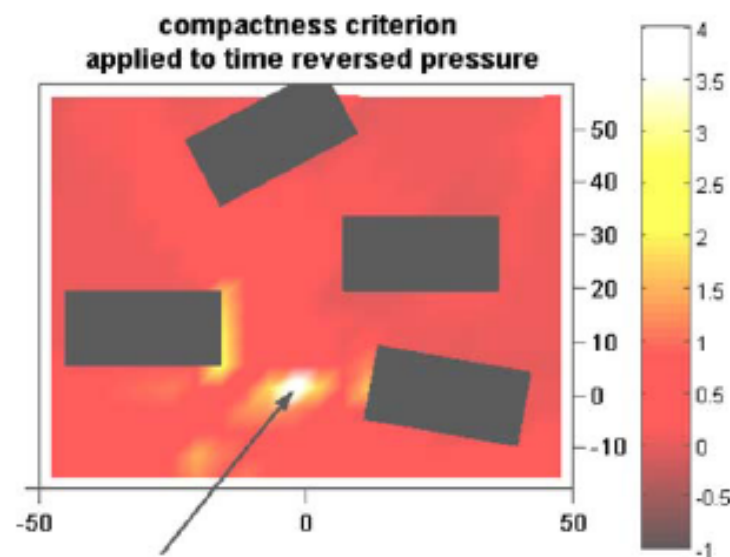


Fig. 5. Compactness criterion.

The computations are conducted using the time-marching ‘retarded potential’ algorithm Astryd [23]. In the reversed time phase, a single computation with the different point sources is sufficient for building the ‘compactness criterion’. This task is accomplished using a time formula (2.4).

No correct results were obtained with 1, 2 or 3 sensors. Five sensors seem necessary, however the experiment was not tried using four. The chosen configuration is a difficult one, because our array is plane (no vertical resolution) and because only 2 sensors view the source vertex.

We tried to compute the ‘compactness criterion’ from the time integrated signal. This option was motivated by the fact that our pressure source profile (Gauss derivative) is not in good agreement with the assumptions of Section 2.3, in contrast with its integral (Gauss). In some cases, the result after integration was better. But we show results obtained only in a direct way through Eq. (2.4).

Geometric data:

cube edge: 1 m.

cube center coordinates: (0, 0, 0) and (2, 0, 0)

source: triangular element near (−0.5, 0.5, 0.5) vertex

array receiver coordinates:

#1 : (1, 0, 0)

#2 : (0, −1, 5, 0)

#3 : (2, −1.5, 0)

#4 : (2.7, 1.5, 0)

#5 : (−0.7, 1.5, 0)

Acoustic data:

sound speed: 340 m/s

normal acceleration of the source element: $\gamma = -2 \times 10^6 (t - 0.005) \exp(-10^6 (t - 0.005)^2)$

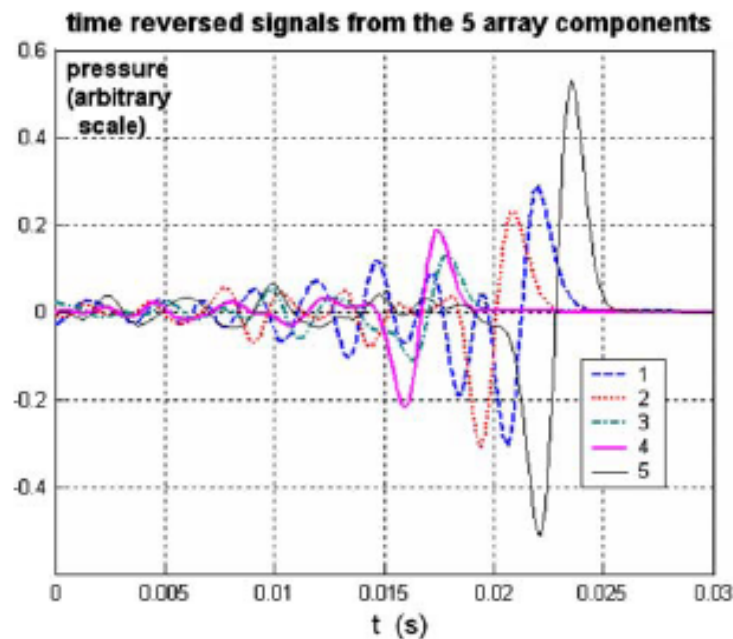


Fig. 6. Time history of the reversed signals from the five sensors.

The reversed signals are shown in Fig. 6, and the total reversed pressure in five points is exhibited in Fig. 7. The best signal compactness is clearly on element 1, the nearest to the source.

Fig. 8 shows the result. It is symmetric in respect to plane $z = 0$. The non-visible faces show no values greater than $4 \times 10^{-4} \text{ s}^{-2}$. The bad vertical resolution is to be related to the plane array shape. Modifications of the processing, such as windowed integration or derivation, lead to only minor changes. A better result would probably be obtained with a higher frequency signal content. But our mesh did not enable that. Conversely, lower frequency signals were tried and a worse resolution was observed.

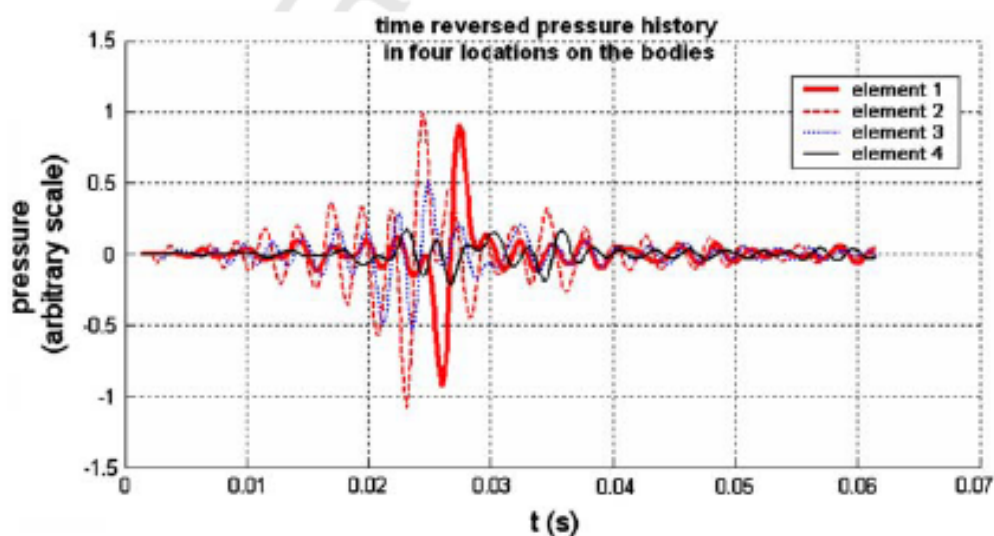


Fig. 7. Time history of the reversed pressure at five locations on the bodies. The number one is the nearest to the source element.

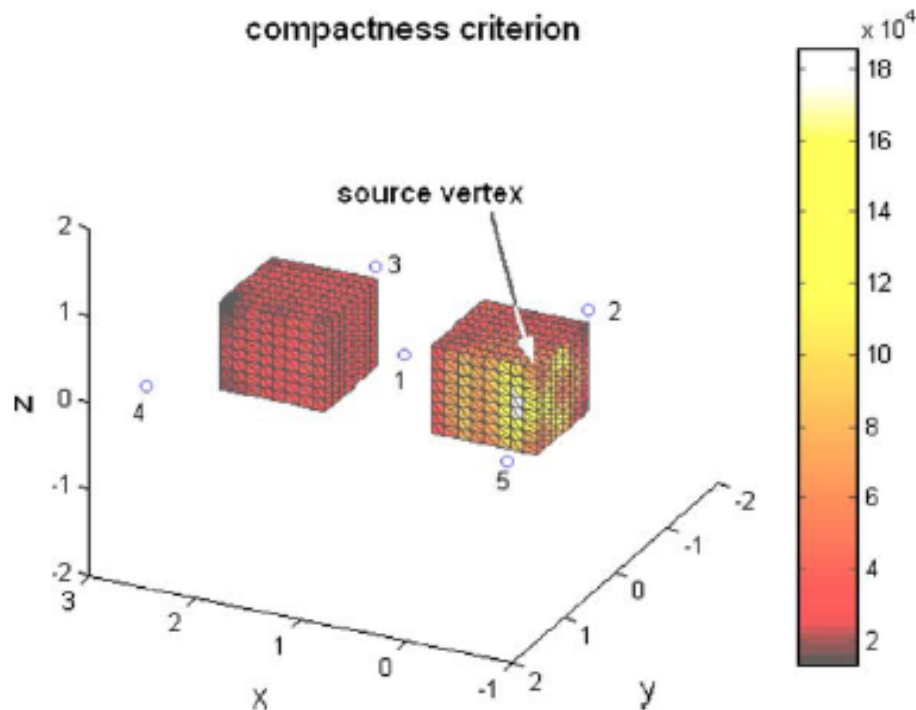


Fig. 8. Source localization. The circles show the sensors positions, all in the symmetry horizontal plane $z = 0$. Scale of the colormap in s^{-2} from 2×10^4 to 18×10^4 .

3.3. Reversed propagation by frequency domain algorithm: experiments on a sphere

3.3.1. Experiment

Measurements were made, in a semi-anechoic room, with a pneumatic high frequency impulse source (U shape visible on the left in Fig. 9) on a half sphere. The source was located very near to the sphere equator. The pressure was recorded with 3 microphones. The use of image microphones as sources for the reversed propagation is an obvious way to improve the quality of the processing.



Fig. 9. Experimental device.

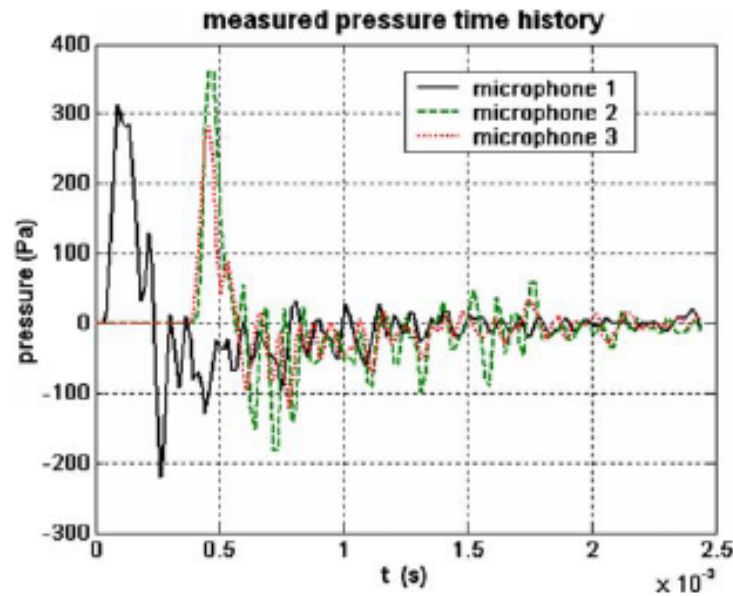


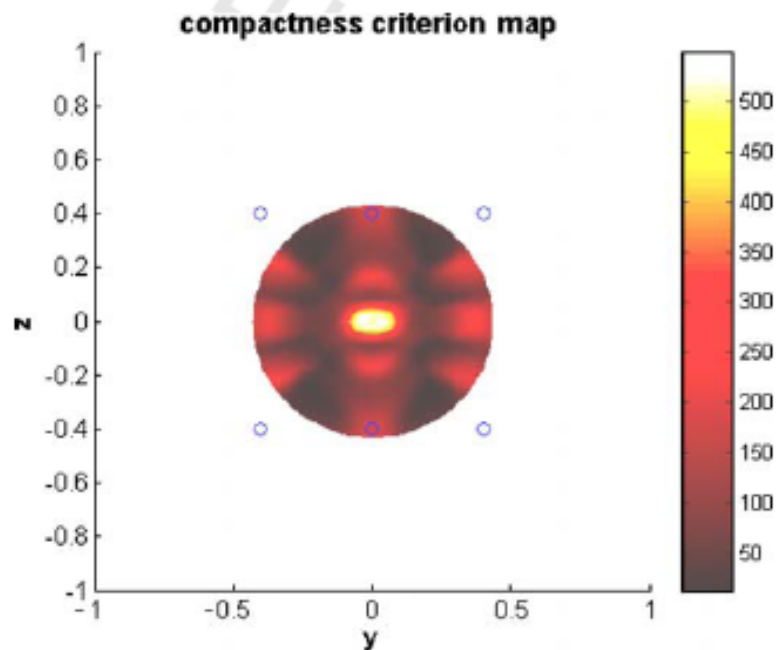
Fig. 10. Measured signal as used for the localization.

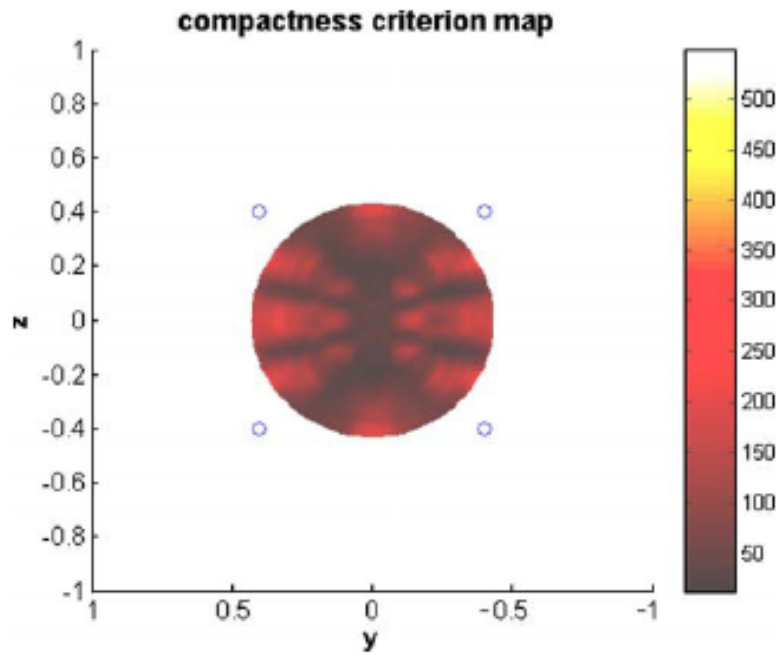
The signal sample is 63536 s^{-1} . No signal filtering was done. Examples of signal are given in Section 3.3.4: Figs. 10 and 13.

3.3.2. Model

We consider a sphere in an acoustic medium. A small cap is moving, working as a point source set on the body. We compute the radiated field with the usual analytical formulas.

The spherical coordinates are r , radial coordinate, θ , azimuth coordinate, and ϕ , circumferential coordinate. The Ox axis is the symmetry axis for the radiation problem.

Fig. 11. Image of the $1/V$ criterion, half sphere $x > 0$.

Fig. 12. Image of the $1/V$ criterion, half sphere $x < 0$.

The sphere radius is R . The normal velocity on the sphere, $V(\theta)$, is expressed in the orthogonal basis of the $\Psi_n(\theta)$ functions, built from the Legendre polynomials

$$\Psi_n(\theta) = P_n(\cos \theta)$$

$$V(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \Psi_n(\theta)$$

The following formula gives the coefficients d_n :

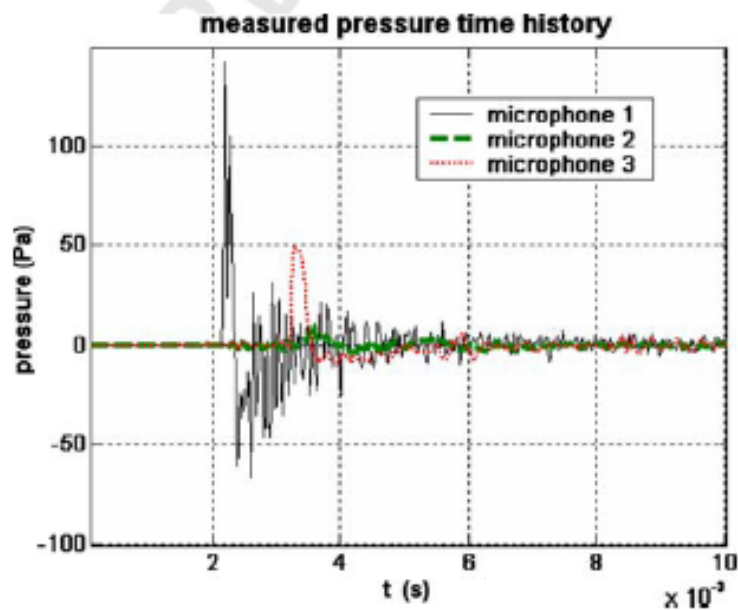


Fig. 13. Measured signal as used for the localization.

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi V(\theta) \sin \theta P_n(\cos \theta) d\theta$$

The radiated pressure is then

$$p(r, \theta) = -i\rho c \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{h_n^{(2)}(kr)}{h_n^{(2)'}(kR)} P_n(\cos \theta) \quad (3.1)$$

These formulas were programmed for a spherical cap with a half angle θ_0 moving with uniform unit normal velocity.

The far field directivity, computed with an asymptotic expression for the spherical Bessel function $h_n^{(2)}(kr)$ with large arguments, and an opening of the cap $2\theta_0 = 0.0524$ radian, gives results which compare favorably with Ref. [24, p. 322]. The series was computed using 40 terms.

3.3.3. Time reversal

The reversed time step leads to a diffraction computation. The pressure on the sphere's surface due to each transducer must be computed and the sum obtained. The transducers are taken as point sources. The reciprocity allows to replace the pressure on the sphere due to a volume source at the transducer location by the pressure at the transducer location due to a volume source on the sphere, because of their proportionality. For this purpose, we still use the radiation formula (3.1). It is not necessary to use the more general sphere formula with a double sum.

Assuming that the sphere surface is meshed in facets, every facet (numbered m) is moving with velocity $\hat{V}_m(\omega)$ in the frequency domain. Its movement generates a pressure $\hat{p}_n(\omega)$ at the transducer location R_n . The transfer function $T_{mn}(\omega)$, taking into account the auto-diffraction by the body, is the ratio $\hat{p}_n(\omega)/\hat{V}_m(\omega)$.

The time reversed signal on the k facet coming from the R_n transducer can be expressed, using reciprocity, as

$$T_{kn}\bar{\hat{p}}_n(\omega)$$

The total pressure taking into account all transducers is

$$r_k(\omega) = \sum_{n=1}^N T_{kn}(\omega)\bar{\hat{p}}_n(\omega) \quad (3.2)$$

Expression (3.2) was implemented using formula (3.1). The compactness parameter $1/V$ was expressed from Eq. (2.5).

3.3.4. Results

In the reversed time computation, we take a half opening angle of 4° for evaluating the Legendre polynomial series used in formula (3.1).

The coordinate origin is at the sphere's center. The sphere radius is 0.43 m.

Source coordinates: (0.43, 0, 0).

Sound speed: 340 m/s;

From very simple considerations on spatial and frequency sampling and from numerical testing, it was possible to state rules for operating reversed propagation in the sphere case.

The term number N_L in the Legendre polynomial series and the number M_p of angle intervals over 180° must verify: $M_p \approx 2N_L$.

The maximum signal frequency, f_M , must verify

$$f_M \frac{cN_L}{3\pi R}$$

3 microphones in front of the source and 3 images – measurements in Fig. 10.

Microphone coordinates:

#1 : (0.83, 0, 0.4)

#2 : (0.83, -0.4, 0.4)

#3 : (0.83, 0.4, 0.4)

Virtual image microphones coordinates:

#4 : (0.83, 0, -0.4)

#5 : (0.83, -0.4, -0.4)

#6 : (0.83, 0.4, -0.4)

Localization process parameters:

Frequency interval taken into account: [200 Hz, 2000 Hz], $B = 1800$ Hz

Number of frequencies in the sum $N_f = 20$, $\Delta f = 94.74$ Hz

Number of terms in the Legendre polynomial series = 24

Sphere meridian discretization: $M_p = 48$, $N_e = 4608$

The results are shown in Figs. 11 and 12.

If from every transducer there is a direct path to the source, the latter is well localized. But what happens if that is not the case?

3 microphones, only one of which has a direct path to the source, and 3 images, measurements in Fig. 13.

Microphone coordinates:

#1 : (0.63, 0.43, 0.43)

#2 : (-0.43, 0.43, 0.20)

#3 : (-0.35, -0.47, 0.35)

Virtual image microphones coordinates:

#4 : (0.63, 0.43, -0.43)

#5 : (-0.43, 0.43, -0.20)

#6 : (-0.35, -0.47, -0.35)

Localization process parameters:

Frequency interval taken into account: [200 Hz, 2000 Hz], $B = 1800$ Hz

Number of frequencies in the sum $N_f = 20$, $\Delta f = 94.74$ Hz

Number of terms in the Legendre polynomial series = 24

Sphere meridian discretization: $M_p = 20$, $N_e = 800$

The results are shown in Figs. 14 and 15.

2 microphones in the shadow zone, no image taken into account, measurements in Fig. 13.

Microphone coordinates:

#2 : $(-0.43, 0.43, 0.20)$

#3 : $(-0.35, -0.47, 0.35)$

Localization process parameters:

Frequency interval taken into account: $[200 \text{ Hz}, 2000 \text{ Hz}]$, $B = 1800$ Hz

Number of frequencies in the sum $N_f = 10$, $\Delta f = 200$ Hz

Number of terms in the Legendre polynomial series = 24

Sphere meridian discretization: $M_p = 48$, $N_e = 4608$

The results are shown in Figs. 16 and 17.

The last two cases show that it is possible to lead the localization with some, or even all, of our few microphones in the shadow zone. Figs. 14 and 15 show a rather good localization with only one physical microphone outside the shadow zone. The latter case is somewhat surprising. Two point sensors define only one surface as the localization locus. The surface intersects the sphere along a curve. The result is better, despite certain defects, because a small area around the source is imaged. In this case, it is possible to say that

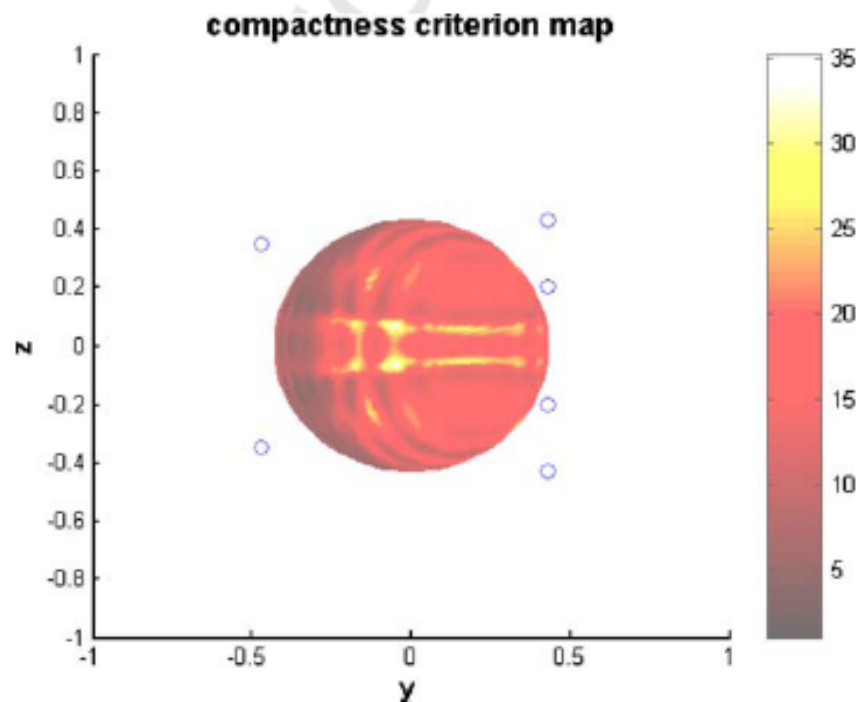
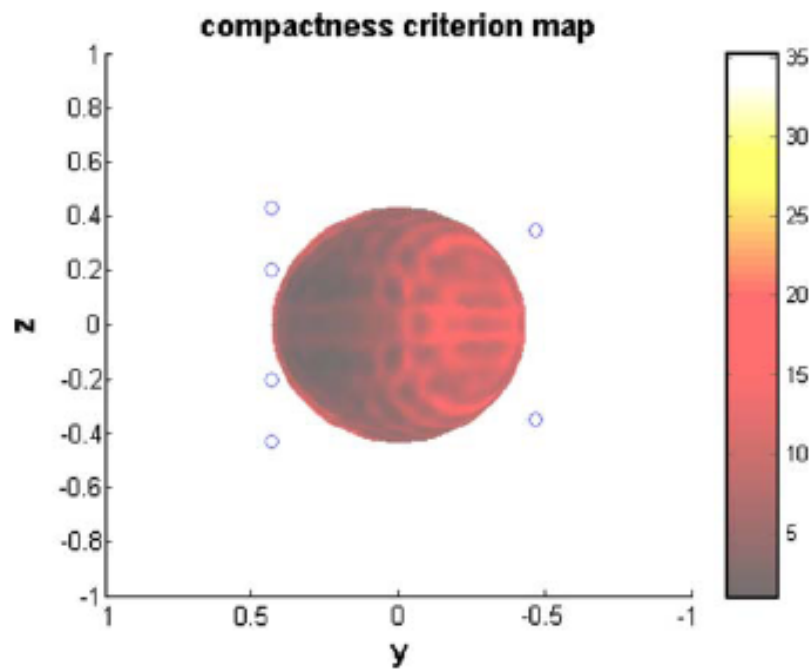
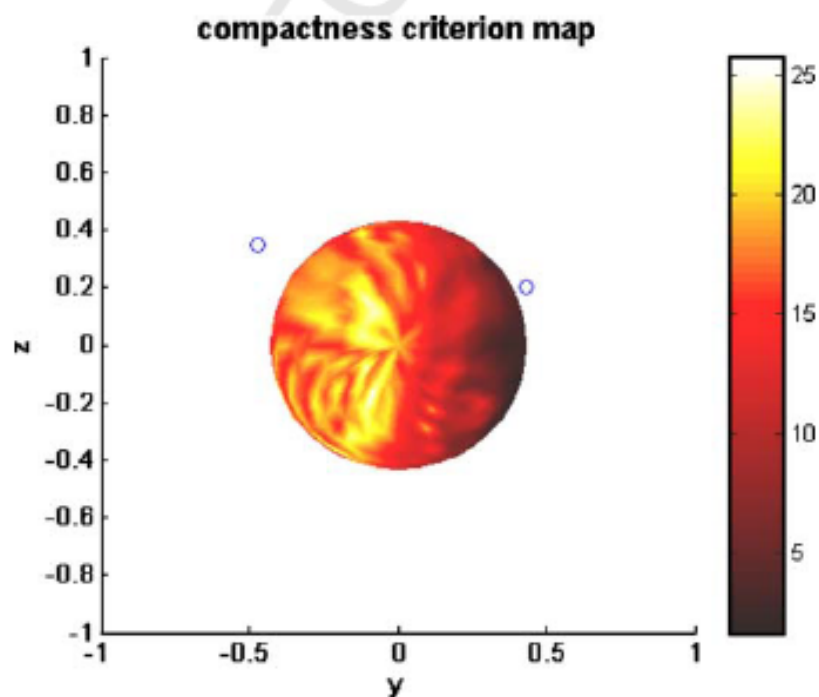


Fig. 14. Image of the $1/V$ criterion, half sphere $x > 0$.

Fig. 15. Image of the $1/V$ criterion, half sphere $x < 0$.

the diffraction effect by the sphere works as a supplementary sensor. This is the basic stage of the above mentioned super-resolution.

The present results support the claim of robustness of the time reversal technique. The measurements of microphone location were indeed very inaccurate (± 0.02 m). This did not generate any trouble. Moreover, some computational tests were made with arbitrary

Fig. 16. Image of the $1/V$ criterion, half sphere $x > 0$.

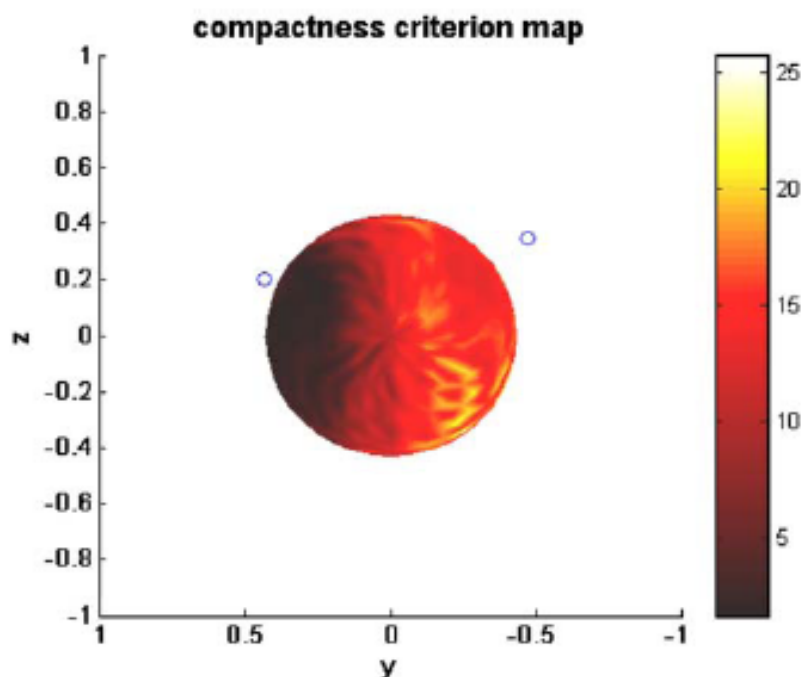


Fig. 17. Image of the $1/V$ criterion, half sphere $x < 0$.

changes of 0.03 m in respect to the measurements, and the result was slightly altered. There are other discrepancy causes which are also worth mentioning: the non-controlled sound speed, sphere shape, source location and source directivity, the non-perfect contact between sphere and ground, the solid transmission by the elastic sphere.

4. Conclusion

Through examples, an area of application for the time reversal technique has been explored: impulse source localization in a domain containing rigid bodies. The criterion based on the time duration of the reversed signal, through its time and frequency expressions, leads to localization with different propagation models. The results support the idea that the time reversal technique is a high quality tool for source localization with very few transducers, and rapid computation, because it makes the best use of the whole set of information, obstacle geometry and broad frequency band. The first example used a ray model; in this respect, it did not therefore process diffraction effects. But the second and third cases showed that diffraction is compatible with our technique, whether the geometry is simple or not. Our method fits especially well with the time-marching algorithm processing. In this case, the result is obtained by a single 'flash' holographic computation.

The results derived from our experiments appear robust under perturbations. Some of them show that taking into account the scattering bodies is equivalent to adding a sensor.

To pursue this work, several questions are to be studied in the future:

- Imaging of sources with space or time extent.
- Correct source level retrieval.
- Use in an elastodynamic context to search impulse sources inside closed solids.

Dispersive media, where wave speed depends on the wavelength, could be a promising area for future applications of the same ideas.

Acknowledgements

My acknowledgements go to Nicolas Trompette from INRS/Lrbm (avenue de Bourgogne, 54501 Vandoeuvre Cedex, France), for his invaluable help with the experiments. I am very indebted to Daniel Vaucher de la Croix, Christophe Thirard and François Magand, from 01 dB-Metravib (200 chemin des Ormeaux, 69760 Limonest, France) for helpful discussions on holography and impulsive source detection.

Appendix.

Example 1 Fig. A1: one source (So), one receiver (R), one plane reflector. “Emission”: R measures two Dirac-shaped signals, with a time lag $(SiR-SoR)/c$.

“Back propagation of the reversed signals”: four signals are emitted in the back propagation phase: two pulses measured in R and their reflections, virtually radiated by Ri. Their time lag is $(SiR-SoR)/c$. Consider the first signal emitted from Ri and the second from R. Their time lag $(SiR-SoR)/c$ is corrected by the path difference $SRi-SoR$, which

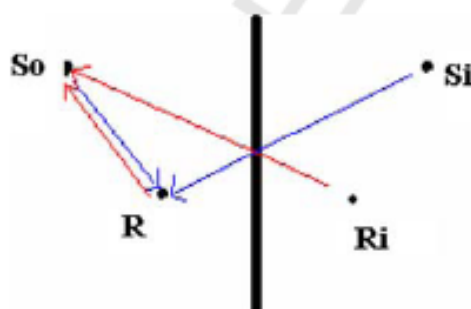


Fig. A1. Sketch for 1 source, 1 receiver, and 1 plane reflector.

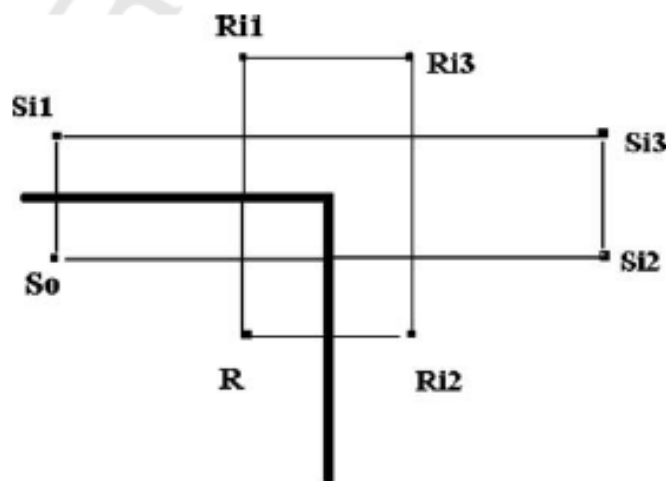


Fig. A2. sketch for 1 source, 1 receiver, and 1 dihedral reflector.

equals SiR-SoR, due to the symmetry of the polygon SoRRiSi. They then arrive simultaneously at So. There is then some kind of focalizing. But it does not allow localizing, because in this example more transducers are necessary. Moreover, the focalizing is not complete. Two of the signals arrive simultaneously at So. But the others do not: the first reversed from R and the last reversed from Ri. They do not focus in the physical left half of the plane, but rather focus in the virtual right half plane. In the physical half plane, their influence is a kind of noise generated by the time reversal technique.

Example 2 Fig. A2: one source (So), one receiver (R), one dihedral reflector. The source is at So, the receiver is at R. The time lags between the Dirac-shaped signals arriving at R are Si1R-SoR, Si2R-SoR, and Si3R-SoR. During the back emission, the images Ri1, Ri2, Ri3 send the four impulses simultaneously. The equalities due to the symmetries: Si1R = -SoRi1, Si2R = SoRi2, Si3R = SoRi3 allow 4 Dirac-shaped signals to arrive at the same time at So. Nevertheless, some parasitic signals remain that do not focus in the physical quarter-of-plane. There are 12 parasitic signals because the total number of reversed Dirac-shaped signals is 16. But the focalizing condition of 4 signals is sufficient (it is even overdetermined) for exact localization of the source since it is at the intersection of three hyperbolas.

If we are able to retrieve, through simulation, the concurrence point of the 4 Dirac-shaped signals, we obtain with only one transducer the result usually obtained in an open plane with at least 3 receivers.

References

- [1] Li Dan, Hu Yu Hen. Energy-based collaborative source localization using acoustic microsensor array. *Eurasip J Appl Signal Process* 2003;4:321–37.
- [2] Williams EG, Maynard JD, Skudrzyk E. Sound source reconstructions using a microphone array. *J Acoust Soc Am* 1980;68(1):340–4.
- [3] Gardner BK, Bernhard RJ. A noise source identification technique using an inverse Helmholtz integral equation method. *ASME J Vib Acoust Stress Reliab Des* 1988;110:84–90.
- [4] Kim G-T, Lee B-H. 3-D sound source reconstruction and field reproduction using the Helmholtz integral equation. *J Sound Vib* 1990;136:245–61.
- [5] Bai MR. Application of BEM (boundary element method)-based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries. *J Acoust Soc Am* 1992;92:533–49.
- [6] Schuhmacher A, Hald J, Rasmussen KB, Hansen PC. Sound source reconstruction using inverse boundary element calculations. *J Acoust Soc Am* 2003;113(1):114–27.
- [7] Augustinovicz F, Tournour M. Reconstruction of source strength distribution by inverting the boundary element method. In: von Estorff O, editor. *Boundary elements in acoustics*. Southampton: WIT Press; 2000.
- [8] Lee JC. Spherical acoustical holography of low-frequency noise sources. *Appl Acoust* 1996;48(1):85–95.
- [9] Isakov V, Wu SF. On theory and applications of the HELS method in inverse acoustics. *Inverse Problem* 2002;18:1147–59.
- [10] Moondra MS, Wu SF. Visualization of vehicle interior sound field using nearfield acoustical holography based on the Helmholtz-equation least-squares (HELS) method. *Noise Control Eng J* 2005;53(4):145–54.
- [11] Jesus SM, Porter MB, Stéphan Y, Coelho E, Démoulin X. Broadband source localization with a single hydrophone. *Proceedings Ocean's 98, Nice, 1998*. p. 1078–82.
- [12] Siderius M, Gerstoft P, Nielsen P. Broadband geo-acoustic inversion from sparse data using genetic algorithms. *Comput Acoust* 1998;6(12):117–34.
- [13] Booth NO, Baxley PA, Rice JA, Schey PW, Hodgkiss WS, D'Spain GL, et al. Source localization with broad-band matched-field processing in shallow water. *IEEE J Ocean Eng* 1996;21(4):402–12.

- [14] Jensen FB, Kuperman WA, Porter MB, Schmidt H. Computational ocean acoustics. New-York: AIP; 1994.
- [15] Fink M. Time reversal in acoustics. *Contemp Phys* 1996;37(2):95–109.
- [16] Fink M, Cassereau D, Derode A, Prada C, Roux P, Tanter M, et al. Time-reversed acoustics. *Rep Prog Phys* 1996;63:1933–95.
- [17] Fink M, Prada C. Acoustic time-reversal mirrors. *Inverse Problems* 2001;17:R1–R38.
- [18] Cassereau D, Fink M. Focusing with plane time-reversal mirrors: an efficient alternative to closed cavities. *J Acoust Soc Am* 1993;94(4):2373–86.
- [19] Draeger C, Fink M. One-channel time-reversal in chaotic cavities: theoretical limits. *J Acoust Soc Am* 1999;105(2):611–7.
- [20] Borcea L, Papanicolaou G, Tsogka C. Theory an applications of time reversal and interferometric imaging. *Inverse Problems* 2003;19:139–64.
- [21] Fouque J-P, Garnier J, Nachbin A, Solna K. Time-reversal refocusing for point source in randomly layered media. *Wave Motion* 2005;42:338–60.
- [22] Dominguez N, Gibiat V, Esquerr Y. Time domain topological gradient and time reversal analogy: an inverse method for ultrasonic target detection. *Wave Motion* 2005;42:31–52.
- [23] Vaucher de la Croix D, Clerc C, Perret L. Vibroacoustic response prediction for spacecraft structures in medium frequency range using a time domain method. In: *Proc 4th int conf spacecraft structures & mechanical testing*, 1994. p. 435–48.
- [24] Skudrzyk E. The foundations of acoustics. Springer; 1971.

Applications of exact causality relationships to materials dynamic analysis

J.-M. Parot ^{a,*}, B. Duperray ^b

^a *Laboratoire de Mécanique et Ingénieries, Institut Français de Mécanique Avancée et Université Blaise Pascal, BP265, Campus de Clermont/Les Cézeaux, 63175 Aubière, France*

^b *01dB-Mettravib, 200 chemin des Ormeaux, 69760 Limonest, France*

Received 17 October 2005; received in revised form 23 June 2006

Abstract

Using the DMA (dynamic mechanical analyzer), measurements of the viscoelastic properties of materials can be carried out: complex Young's modulus or shear modulus. By applying the 'WLF time–temperature equivalence principle', one can obtain 'master-curves' from a sweeping in both frequency and temperature. The practical boundaries make the mechanically scanned frequency domain very limited, but the frequency–temperature equivalence allows to put together the different frequency sweepings that were made at different temperatures, and to synthesize them in one pair of master-curves (real and imaginary parts). With a linear viscoelastic assumption, these curves are linked by a causality relationship, as are the phase and log-amplitude. This relation is expressed in terms of Hilbert transform. We built an algorithm that is convenient for very large frequency intervals (30 powers of ten). Examples are shown of phase generating from the magnitude measurement, and of master curve quality assessment from a causality defect.

© 2006 Elsevier Ltd. All rights reserved.

Keywords: Viscoelasticity; Young's modulus; Hilbert transform; Kramers–Kronig relations; Causality; WLF principle; Reduced variables

1. Introduction

Our work aims at using the causal character of frequency response functions measured on linear-behavior specimens. Causality induces relationships between the real part and the imaginary part and between the log-amplitude and the phase of transfer functions. These relationships are expressed in terms of Hilbert transform. This is not a new concept,

since it was used in the early works on dielectrics that led to the “Kramers–Kronig” relations (Scaife, 1989). Although the Hilbert transform was first used in the 1920s, it has recently been improved and new applications in various areas of physics have been found (Reddy and Swamy, 1991; Van der Noot, 1992). The purpose of these works is either better data storage (Zolnai et al., 1990), or processing of incomplete data sets (Fannin et al., 1993; Castro and Nabet, 1999) or data cleaning before using them for simulation (Boche and Protzmann, 1997; Perry and Brazil, 1998).

In our domain of interest, i.e., mechanics, there were applications of Hilbert transform to structural

* Corresponding author. Fax: +33 4 73 28 8100.

E-mail addresses: parot@ifma.fr (J.-M. Parot), bernard.duperray@01db-mettravib.com (B. Duperray).

dynamics as early as in the 1980s. Non-observance of Kramers–Kronig relations was used as an indication for non-linearity of the system under study (Vinh et al., 1984; Tomlinson, 1987). The concept of forcing measured data to meet the causality conditions is mentioned in these works, but also in (Parot et al., 1989), with the aim to link structures in “medium frequency” domains. The purpose was then to define curve fitting of the medium frequency responses that would have physical coherence and that would then obey fundamental physical laws, among which causality: consequence cannot come before cause. The Hilbert transform had however not been applied to real measurements.

Apart from structural dynamics, one of its first application consisted in generating the phase of a transfer function from its magnitude, which is easier to measure (ultrasound attenuation) (Kuc, 1984). Another application was to build up a causality test for transfer functions, both measured or/and modeled functions. It was done for, e.g., propagation in an absorbing medium (Fellah et al., 2004).

When applying these concepts to rheology, one has to take into account the large extent of frequency ranges, which makes any processing harder. The first approach was then to use approximate Kramers–Kronig relations that did not require any integral calculation (Booij and Thoone, 1982; Schapery and Park, 1999). In particular, and in an experimental context, it has been suggested (Caracciolo and Giovagnoni, 1996; Caracciolo et al., 2001) to build master curves based on the approximate Bode’s relationship. For a general processing of experimental data, this approximation is not satisfactory. The building of master curves is often badly conditioned, whereas the set-up of a “causality” constraint can improve the situation, provided this constraint is as exact as possible.

We have then developed specific calculation algorithms and programs to carry out data analysis on very large frequency ranges. This paper presents two distinct applications of full causality relationships to the measurement of complex moduli of viscoelastic materials (and not approximate relationships as in Booij and Thoone, Schapery and Park, Caracciolo and Giovagnoni, Caracciolo et al.):

- Generation of the phase from the log-amplitude, a technique allowing for simpler experimental set-ups.
- Assessment of the quality of master curves, based on the observance of causality relationships. Our

aim is to provide a tool to locate areas where problems occur, either due to erroneously built master curves or due to materials behavior not compatible with working hypotheses.

Despite how long this topic has been studied, it is still of very much interest. As shown by recent works, the development of measuring and processing methods opens up ever growing perspectives for the viscoelastic measurement data processing (Eyre et al., 2002) and the application of causality relationships (Pritz, 2005).

2. Theory and formulae

2.1. Definitions and introduction to Hilbert transform

We shall consider hereafter “output/input” transfer functions of physical systems.

Let $f(\omega)$ be one of these functions. It is a complex function of a real variable. It is the Fourier transform of a time function representing the response to a Dirac excitation, this latter being applied according to the input degree of freedom. Let $I(t)$ be the impulse response corresponding to f :

$$f = TF\{I\}$$

The Fourier transform is defined by the usual relationships, hence

$$\begin{cases} f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(t)e^{-i\omega t} dt \\ I(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega)e^{i\omega t} d\omega \end{cases}$$

which induces:

$$\begin{cases} TF\{f * g\} = TF\{f\}TF\{g\} \\ TF\{f\} * TF\{g\} = 2\pi TF\{fg\} \end{cases}$$

that will be used in the next paragraph.

• Hilbert transform

– Definition

The Hilbert transform of $f(\omega)$ can be defined as the convolution product of f with the $-\frac{1}{\pi\omega}$ distribution (see Reinhard, 1986). The convolution integral is defined as a Cauchy principal value. Let $TH\{f\}$ be the Hilbert transform of f . It is expressed as follows:

$$TH\{f\} = CPV\left[f * \left(-\frac{1}{\pi\omega}\right)\right]$$

where CPV means “Cauchy principal value”. The distribution $-\frac{1}{\pi\omega}$ is defined to within a

Dirac distribution at its pole $\omega = 0$ at the origin. Indeed, the division in terms of distributions (or generalized functions) shows a Dirac signal of arbitrary complex amplitude at the location of any simple pole (Dautray and Lions, p. 1337). The Cauchy principal value of our integral is defined as that where the Dirac distribution amplitude is assumed to be equal to zero. From here on, we shall no longer specify “CPV” for principal value. In the context of the distribution theory, the integral is, unless otherwise specified, automatically estimated in Cauchy principal value.

– *Time domain*

The inverse Fourier transform of $\frac{1}{i\pi\omega}$ is $\frac{1}{2\pi} \text{sgn}(t)$. From the rules of convolution product and Fourier transform, in the time domain the Hilbert transform consists in multiplying the inverse Fourier transform of $f(\omega)$ by $i \text{sgn}(t)$.

– *Inverse Hilbert transform*

For any function x : $TH^{-1}\{x\} = -TH\{x\} + C$, where C is an arbitrary constant. To prove this, let us solve the equation yielding the inverse Hilbert transform of x : $TH\{y\} = x$. With $\tilde{x}(t)$ the inverse Fourier transform of x , the latter equation can also be written $i \text{sgn}(t) \tilde{y} = \tilde{x}$, i.e., due to the zero of signum function at the origin, $\tilde{y} = -i \text{sgn}(t) \tilde{x} + C\delta(t)$, and by Fourier transform, $y = -TH\{x\} + C$.

– *Translation*

The Hilbert transform remains unchanged after a translation:

$$TH\{f(\omega - \omega_0)\} = [TH\{f\}](\omega - \omega_0)$$

– *Examples of Hilbert transform:*

Hilbert transform of a constant function is zero: $TH(1) = 0$. Hilbert transform of sinusoidal functions:

$$TH\{\cos k\omega\} = \sin k\omega, \quad TH\{\sin k\omega\} = -\cos k\omega$$

2.2. Application to viscoelasticity

The viscoanalyzer, or DMA, is used to measure the transfer function σ/ε . Hereafter, it will be called E , i.e., complex Young’s modulus. Our reasoning remains unchanged if G , the shear modulus, is measured instead of E . The modulus consists of a real part and an imaginary part:

$$E = E' + iE''$$

It is also expressed as $E = |E|e^{i\phi}$.

Let us call $T(\omega)$ the $E(\omega)/i\omega$ function and $J(t)$ its inverse Fourier transform. Then, $\hat{\sigma} = i\omega T(\omega)\hat{\varepsilon}$ (\hat{x} being the Fourier transform of x). By inversion of the Fourier transform:

$$\sigma(t) = J(t) * \frac{d\varepsilon}{dt}$$

$J(t)$ is then the stress observed as the response to a strain unit step. It is the material relaxation modulus.

The Fourier transform of the relaxation modulus $J(t)$ is $E(\omega)/i\omega$.

The Fourier transform of its derivative $J'(t)$ is $E(\omega)$.

Similarly, from $\frac{\hat{\varepsilon}}{i\omega\hat{\sigma}} = \frac{1}{i\omega E}$, we get $\varepsilon(t) = TF^{-1}\left\{\frac{1}{i\omega E}\right\} * \frac{d\sigma}{dt}$.

The Fourier transform of the creep function is $\frac{1}{i\omega E}$.

Causality implies then that the inverse Fourier transform of E is real and equal to zero for $t < 0$. The “real” condition is automatically met since measurements carried out for positive frequencies are implicitly complemented by measurements exhibiting the proper symmetry. The “zero for $t < 0$ ” condition is however a quality criterion for measurements.

The “Hilbert” criterion is then of interest. The elasticity modulus must obey the following relations, which are simply a rewriting of formulae demonstrated in [Appendix 1](#).

ln, Napierian logarithm; Log, complex logarithm function.

$$i TH\{E\} = E \quad (1)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{E'(u)}{u^2 - \omega^2} du &= E''(\omega) \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{uE''(u)}{\omega^2 - u^2} du &= E'(\omega) \end{aligned}} \quad (2)$$

$$i TH\{\text{Log } E\} = \text{Log } E$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln |E(u)|}{u^2 - \omega^2} du &= \phi(\omega) \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{u\phi(u)}{\omega^2 - u^2} du &= \ln |E(\omega)| \end{aligned}} \quad (3)$$

The latter relations (3) rely on the assumption that $1/E(\omega)$ has a causal inverse Fourier transform. Mathematically, E has then to fulfill the Paley–Wiener condition. But the physical meaning is that the derivative of the creep function of the material does exist as a mechanically admissible time evolution (see [Appendix 1](#)).

3. Generation of the phase from the magnitude

The distinctive characteristic of the transfer functions under study (E elasticity modulus) is that it ranges over very large frequency intervals. Typically, a “master curve” ranges over 10–15 decades. The corresponding Hilbert transform cannot be based on regular discretization of frequencies. Indeed, it would then lead to a huge number of points to process. For a function ranging over, e.g., 12 decades, if the first decade is discretized into 10 points, the regular discretization of the study domain shall yield 10^{12} points, which will take up more than 1000 Gigabytes of memory. Furthermore, there are far less points that are actually measured, therefore the information that is actually available does not justify for calculations of this scale, which are not really relevant. Calculation methods using direct FFT shall then not be considered here. Using the change of variable $\delta = 2 \tan^{-1}(\omega/\omega_0)$, which was suggested by Papoulis (Van der Noot, 1992), it is possible to strongly reduce the FFT size. But for 12 decades, 10^6 points will still be necessary, and 10^{15} for 30 decades. Hence, applying this algorithm to several successive intervals is the only way to use it, but the method is approximate. We rule out it for this reason.

To solve this problem, we opted for analytical integration, functions to transform being assumed piecewise linear. Let us note that we could also have opted for the method presented in (Weideman, 1995). It relies on the development of the function based on $\left\{ \frac{(1+i\omega)^n}{(1-i\omega)^{n+1}}, n \in \mathbb{Z} \right\}$ functions, which generate a proper space for the Hilbert transform.

3.1. Algorithm

Hereafter, we shall introduce the calculation algorithm for the Hilbert transform of the Napierian logarithm of the modulus, based on first Eq. (3). The $[0, +\infty[$ interval is discretized by the $N-1$ sampling points of the measurements, to which a point of origin and a point to the infinity are added, since they are required for the calculation:

$$\omega_0 = 0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i, \omega_{i+1}, \dots, \omega_{N-1}, \omega_N = +\infty.$$

3.1.1. Smoothing and extension

The calculation method for the Hilbert transform tends to enhance rapid variations of the measure-

ment-noise type. For this reason, one had better decrease these oscillations by smoothing. The very simple process we applied consists in defining new values for the modulus: mean values over the next two neighbors.

Furthermore, to achieve the analytical integration, the function must be specified as a continuous function over $[0, +\infty[$. The data span is only $[\omega_1, \omega_{N-1}]$. That is the reason why it is necessary to assign values to frequency intervals with no measured data: $[0, \omega_1[$ and $]\omega_{N-1}, +\infty[$.

- Extension to the low-frequency domain: function $|E|$ is even because $\text{Re } E$ is even and $\text{Im } E$ is odd. It is assumed to be non-zero and continuous for $\omega = 0$. It seems natural to extend it by a constant for $0 < \omega < \omega_1$. Since one point is added for $\omega_1/2$, to complete the family of middle points, one will then use the following relations: $|E(0)| = |E(\omega_1/2)| = |E(\omega_1)|$.
- Extension to the high-frequency domain: beyond the last discretization point, the function shall be assumed to be constant. Since a point is added for $\omega_{N-1} + (\omega_{N-1} - \omega_{N-2})/2$, to complete the family of middle points, one will then use the following relations:

$$\begin{aligned} |E(\omega_{N-1})| &= |E(\omega_{N-1} + (\omega_{N-1} - \omega_{N-2})/2)| \\ &= |E(\omega_N)|. \end{aligned}$$

3.1.2. Analytical integration

Let us assume that the $\ln|E|$ function is linear by parts. Eventually, after the aforementioned smoothing operation, $N+1$ intervals were generated from $N-1$ measurement points. Frequency points are renumbered in order to take into account the newly generated points.

Integral of Eq. (3) is calculated assuming that $\ln|E|$ is linear on each interval. In interval $[\omega_i, \omega_{i+1}]$, $\ln|E| = a_i\omega + b_i$.

Let us calculate the phase:

$$\phi(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \sum_{i=0}^N \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{a_i u + b_i}{u^2 - \omega^2} du$$

The integral is calculated as follows:

$$\begin{aligned} \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{a_i u + b_i}{u^2 - \omega^2} du &= \frac{1}{2} a_i \ln \left| \frac{\omega_{i+1}^2 - \omega^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \right| \\ &\quad + \frac{1}{2\omega} b_i \ln \left| \frac{(\omega_{i+1} - \omega)(\omega_i + \omega)}{(\omega_{i+1} + \omega)(\omega_i - \omega)} \right| \end{aligned}$$

hence:

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = & \frac{b_0}{\pi} \ln \left| \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1 + \omega} \right| + \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \frac{\omega}{\pi} a_i \ln \left| \frac{\omega_{i+1}^2 - \omega^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \right| \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} b_i \ln \left| \frac{(\omega_{i+1} - \omega)(\omega_i + \omega)}{(\omega_{i+1} + \omega)(\omega_i - \omega)} \right| \right\} \\ & + \frac{b_N}{\pi} \ln \left| \frac{(\omega_N + \omega)}{(\omega_N - \omega)} \right| \end{aligned} \quad (4)$$

If f_i is the value of the function for ω_i , coefficients can be replaced by their values:

$$a_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\omega_{i+1} - \omega_i}, \quad b_i = f_i - a_i \omega_i = \frac{f_i \omega_{i+1} - f_{i+1} \omega_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} \quad (5)$$

The resulting function is continuous: logarithmic singularities at ω_i offset each other as soon as the continuity of the piecewise linear function is guaranteed at the interval limits. Its asymptotic behavior for $\omega \rightarrow \omega_i$ is of the following type:

$$\phi(\omega - \omega_i) - \phi(\omega_i) \sim (\omega - \omega_i) \ln |\omega - \omega_i|$$

On the other hand, as seen when deriving the above expression, its derivative at points ω_i is infinite. Theoretically it exhibits a logarithmic-type singularity. As seen in the case study presented in Appendix 3, if data are very good (analytical case), the perturbations are small enough not to appear on the graph.

The influence of disruptions is lowest at discretization points and at the middle point of segments. This results from empirical observations, but also from theoretical arguments in a borderline case: see Appendix 2. We chose then to calculate phase values at discretization points.

An approximation of higher order for the modulus would probably yield better quality results, but at the expense of far more complex analytical calculations. We have opted for simplicity. Defects of the piecewise linear approximation are well spotted: locally infinite slope at the interval limits, sensitivity to continuity numerical defects of the discretized function.

3.2. Numerical experiments

From now on, we shall study measurements carried out with viscoanalyzer VA2000 by OldB-Metravib.

After performing a frequency and temperature data acquisition (e.g., Fig. 9), master curves were generated using a standard algorithm based on the

least-square method. The shift function α_T was determined by the software. Experimental points being gathered on the master curve of the $|E|$ modulus, our technique was applied, along with the approximate Bode's formula:

$$\phi(\omega) \cong \frac{\pi}{2} \frac{d \ln |E|}{d \ln \omega} \quad (6)$$

(see, e.g., Caracciolo et al., 2001).

The same data as for the Hilbert transform (moving average over two points) were processed using finite differences. Computed phases could then be compared to the measured phase.

• Material #1 (synthetic rubber) (Figs. 1 and 2)

Applying Bode's formula yields very noisy results, due to the rather high level of experimental randomness. After smoothing by a further running average over 10 points, Eq. (4) shall be preferred.

• Material #2 ("bitumen")

Our technique yields correct results, except for a low-frequency zone ($\log f < -2$). This is clearly an edge effect due to the extension of the modulus into the low frequency domain. The extension hypothesis using a constant function up to $f = 0$ is certainly not suited to the observed form of the magnitude function $|E|$ (Fig. 3) because of the strong slope discontinuity it generates in the $|E|$ chart at $\log f = -4$. This effect allows us to estimate the frequency range,

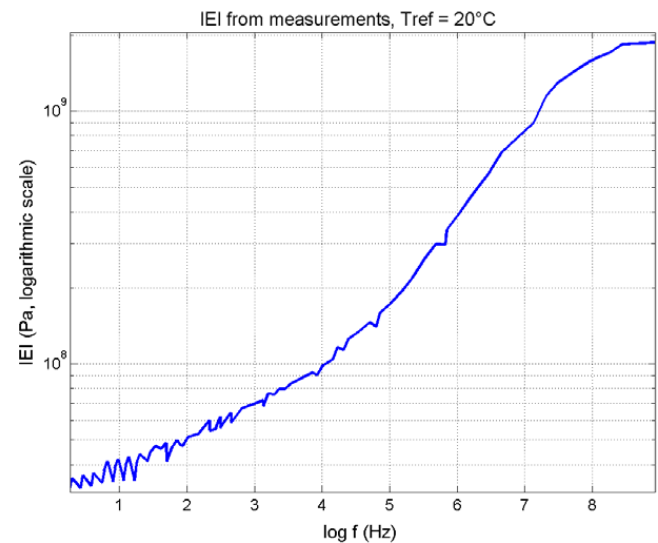


Fig. 1. Data for phase computation – log is the decimal logarithm.

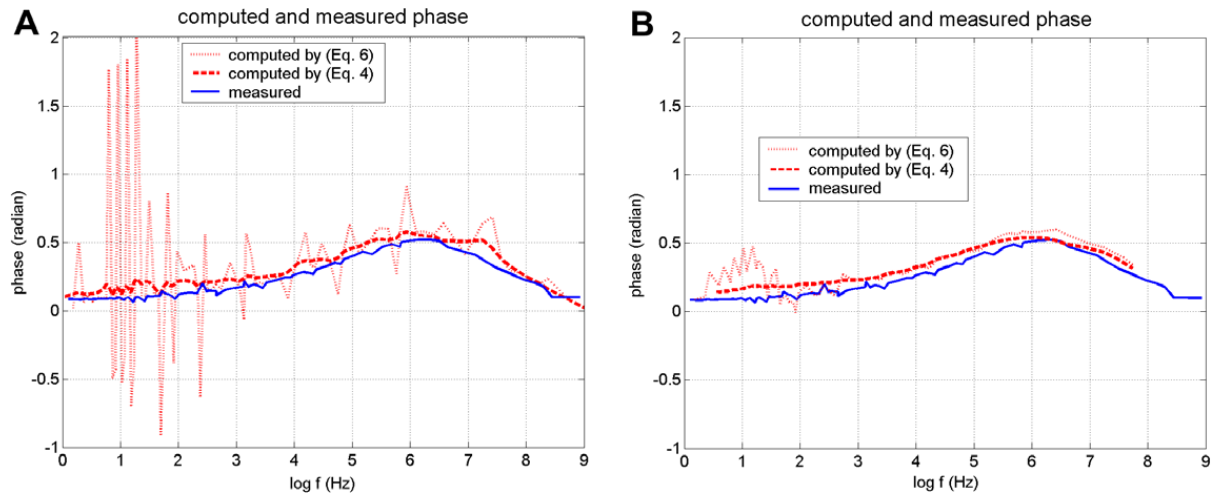


Fig. 2. Results compared to experimental reference. (A) Without smoothing. (B) Computed results smoothed by moving average over 10 values.

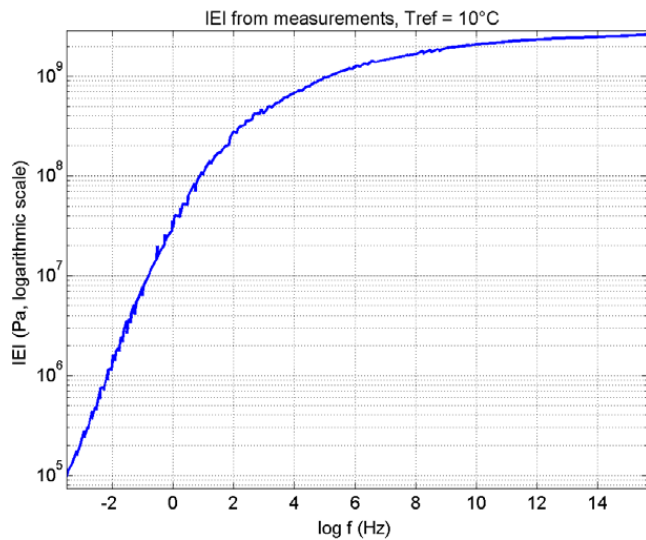


Fig. 3. Data for phase computation.

after the Hilbert transform, of a localized perturbation at about one decade. One decade indeed is the approximate range where the departure is higher than 0.05 radian in Fig. 4A. The Bode's approximate formula yields unworkable results for $\log f < 2$, as they are too noisy.

3.3. Conclusion

There does not seem to be any particular problem to determine the phase from the magnitude, provided data are of good quality, i.e., when the material is compliant with the hypotheses of the "WLF" principle governing the building of master curves ("thermorheologically simple" materials). Examples are shown above. Running average smoothing yields results close to the reference for

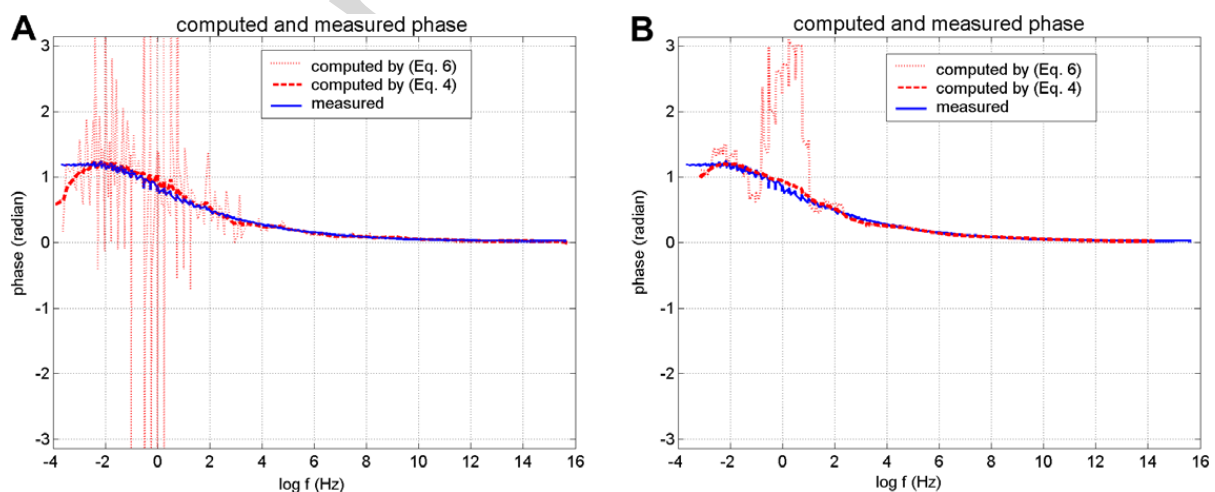


Fig. 4. Results compared to experimental reference. (A) Without smoothing. (B) Computed results smoothed by moving average over 10 values.

bitumen and a rougher approximate result for material #1. This gives way to a technique for which only the “magnitude” master curve is built from the reduced-variable method based on the WLF principle.

4. Assessment of the quality of master curves obtained from measurements

4.1. Hilbert transform

The Hilbert transform was applied to the real part and to the imaginary part of function $E(\omega)$ using Eq. (2). For the Hilbert transform of the real part, we used the algorithm described in Section 3.1, the situation being strictly identical since the real part is even. For the imaginary part, the process is slightly different.

The values used as starting values are the average values of the modulus at the center of intervals.

Also, to carry out the analytical integration, one needs to specify the function out of the intervals:

- Extension to the low-frequency domain: function $\text{Im } E$ is odd. It is assumed to be continuous for $\omega = 0$, hence equal to zero for this point. It can then be naturally extended for $\omega < \omega_1$ by writing: $E'' = a_0\omega$. Since a point is added for $\omega_1/2$ to complement the family of center points, one will use the following relations: $E''(\omega_1/2) = 1/2E''(\omega_1)$.
- Extension to the high-frequency domain: beyond the last discretization point, one will assume that the function is constant. Since a point is added for $\omega_{N-1} + (\omega_{N-1} - \omega_{N-2})/2$ to complement the family of center points, one will use the following relations:

$$\begin{aligned} E''(\omega_{N-1}) &= E''(\omega_{N-1} + (\omega_{N-1} - \omega_{N-2})/2) \\ &= E''(\omega_N) = b_N. \end{aligned}$$

One can notice the contradiction between the different asymptotic forms of the frequency tending to 0. It is indeed not possible for the real part and the modulus to be constant while the imaginary part follows a linear variation. This contradiction cannot be avoided if one wishes to keep a form that can be integrated analytically. Furthermore, the same contradiction is observed for each interval as soon as one assumes that the functions are piecewise linear. This is the price to be paid for simplicity. With a sufficiently fine discretizing of the curves, the error generated in this way remains low compared with

measurement noise. In the direct computation of the phase, this error behaves like a classical discretization error. It vanishes when the grid is refined. In the computation of the ‘non-causality index’ (Section 4.2), a systematic non-zero error appears. The discussion in Section 4.3 – epoxy resin – shows that the problem is of little importance.

The second integral of Eq. (2) is calculated based on the assumption that the function to transform, E'' , is linear for each interval. On interval $[\omega_i, \omega_{i+1}]$, $E'' = a_i\omega + b_i$

$$E'(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^N \int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} \frac{a_i u + b_i}{\omega^2 - u^2} u du$$

The integral is calculated as follows:

$$\begin{aligned} &\int_{\omega_i}^{\omega_{i+1}} u \frac{a_i u + b_i}{u^2 - \omega^2} du \\ &= a_i(\omega_{i+1} - \omega_i) + \frac{1}{2} b_i \ln \left| \frac{\omega_{i+1}^2 - \omega^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \right| \\ &\quad + \frac{1}{2} a_i \omega \ln \left| \frac{(\omega_{i+1} - \omega)(\omega_i + \omega)}{(\omega_{i+1} + \omega)(\omega_i - \omega)} \right| \end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= -\frac{2}{\pi} a_0 \omega_1 - \frac{a_0}{\pi} \omega \ln \left| \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1 + \omega} \right| \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \frac{2}{\pi} a_i (\omega_{i+1} - \omega_i) + \frac{a_i}{\pi} \omega \right. \\ &\quad \times \ln \left| \frac{(\omega_{i+1} - \omega)(\omega_i + \omega)}{(\omega_{i+1} + \omega)(\omega_i - \omega)} \right| + \left. \frac{b_i}{\pi} \ln \left| \frac{\omega_{i+1}^2 - \omega^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \right| \right\} \end{aligned}$$

Using Eq. (5)

$$\begin{aligned} E'(\omega) &= -\frac{2}{\pi} f_N - \frac{1}{\pi} \frac{f_1 \omega}{\omega_1} \ln \left| \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1 + \omega} \right| \\ &\quad - \sum_{i=1}^{N-1} \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{f_{i+1} - f_i}{\omega_{i+1} - \omega_i} \omega \ln \left| \frac{(\omega_{i+1} - \omega)(\omega_i + \omega)}{(\omega_{i+1} + \omega)(\omega_i - \omega)} \right| \right. \\ &\quad \left. + \frac{f_{i+1} \omega_i - f_i \omega_{i+1}}{\pi(\omega_{i+1} - \omega_i)} \ln \left| \frac{\omega_{i+1}^2 - \omega^2}{\omega_i^2 - \omega^2} \right| \right\} \end{aligned}$$

The Hilbert transform is defined to within a constant. This constant can be assumed as equal to zero since, after inverse Fourier transform, it corresponds to a Dirac time signal at the origin, which has no consequence on causality and is not taken into account in our numerical calculation.

This algorithm relies on the piecewise linear approximation of function E'' , like the algorithm described in Section 3.1, which was used for the real part E' . The result has then the same features: it is

continuous, but sensitive to rapid oscillations (measurement errors) of the E'' approximation. The derivative exhibits logarithmic singularity for ω_i points.

4.2. Non-causality index

In order to assess the data intrinsic error, an index was built up, showing the deviation to the ideal situation of perfectly causal data. This index is written as follows:

$$In = \frac{1}{2} \left| \frac{TH\{E\} + iE}{E} \right| \quad (7)$$

Based on Eq. (1), the index is equal to zero for any frequency if data are causal. It is equal to 1, if the causality relation is violated by 100%, i.e., $(TH\{E\} = iE)$. It can be greater than 1.

It is a local index since it is frequency-dependent. It may be useful to have a synthetic index allowing to assign a single non-causality index to the set of measurements. To do so, a global index was defined:

$$Ig = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\int_0^\infty |TH\{E\} + iE|^2 d\omega/\omega^2}}{\sqrt{\int_0^\infty |E|^2 d\omega/\omega^2}} \quad (8)$$

This form was selected since $T(\omega) = E(\omega)/i\omega$ is the Fourier transform of the relaxation function $J(t)$ (Section 2.2). Thus, for any material, whose squared relaxation function can be integrated, the Parseval formula can be applied and integral $\int_0^\infty |E|^2 d\omega/\omega^2$ is convergent.

In the abstract space of complex functions of real variable, Eq. (8) is interpreted as the ratio of the distance of function $T(\omega)$ to the causal hyperplane to

the norm of T , or as the sine of the angle between the causal hyperplane and the $T(\omega)$ “vector”.

4.3. Numerical experiments

• Material #1 (synthetic rubber)

Let us use again material #1, previously studied in Section 3.2. Complex Young’s modulus was extracted from measurements using an optimized α_T shift function. In other words, raw master curves are available. Below are presented:

- The comparison between the experimental real part derived from the shift function (continuous line) and the real part computed from the imaginary part (Fig. 5A).
- The comparison between the experimental imaginary part derived from the shift function (continuous line) and the imaginary part computed from the real part (Fig. 5B).
- The non-causality index In and its global value Ig , based on measurements (Fig. 6).

The correspondence between real and imaginary parts in terms of Kramers–Kronig relations is quite good. A problem clearly occurs for the high-frequency limit. Calculation of the imaginary part results in a negative value for $\log f = 8.4$, and this defect can be observed on the plot in Fig. 6. One could then suspect that the measurement is not correct for this domain. However, since this type of situation is also observed for other data sets (Figs. 4A and 10), it probably results from an edge effect related to truncated data. Therefore, from now on,

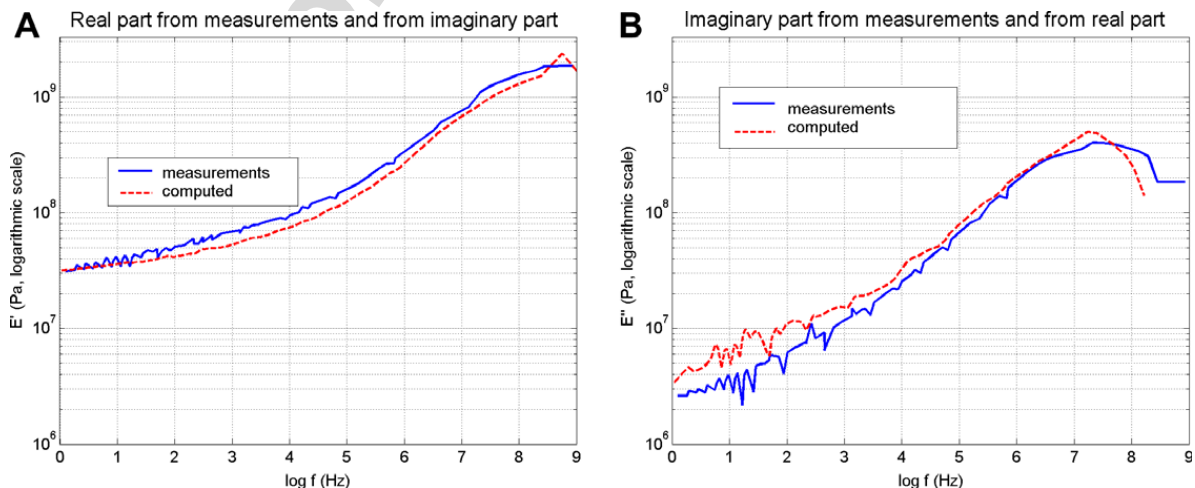


Fig. 5. Hilbert-transform computed and measured real and imaginary parts.

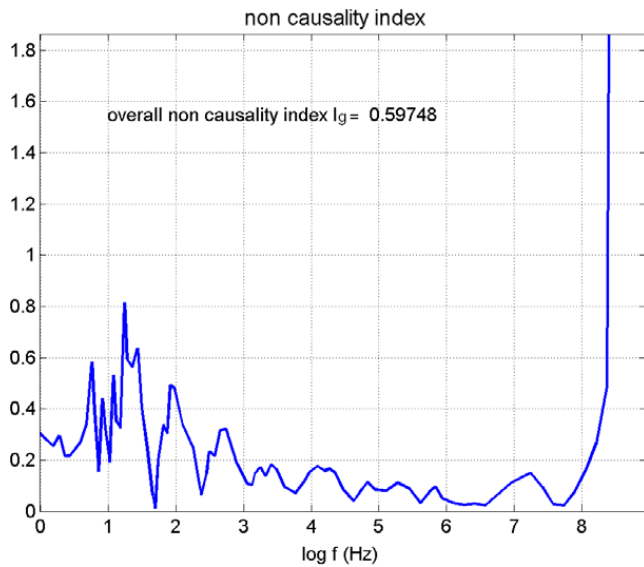


Fig. 6. Index estimating the distance to causality in the experimental data.

results from the decade preceding the data maximum frequency will be removed from the calculation in order to get rid of this edge effect.

For $\log f < 8$, one notices a good correlation of the local index value with deviations observed on the curves. If one were to set a quality criterion, e.g., $I_n = 0.2$, measurements for $\log f < 3$ and $\log f > 8$ would be rejected.

• Material #2 (bitumen) (Fig. 7)

The low value of I_g confirms the high quality of this data set in spite of the decade “ $\log f > 14$ ” where some problems arise due to an edge effect. The value of I_n in this area is very high ($I_n = 63$).

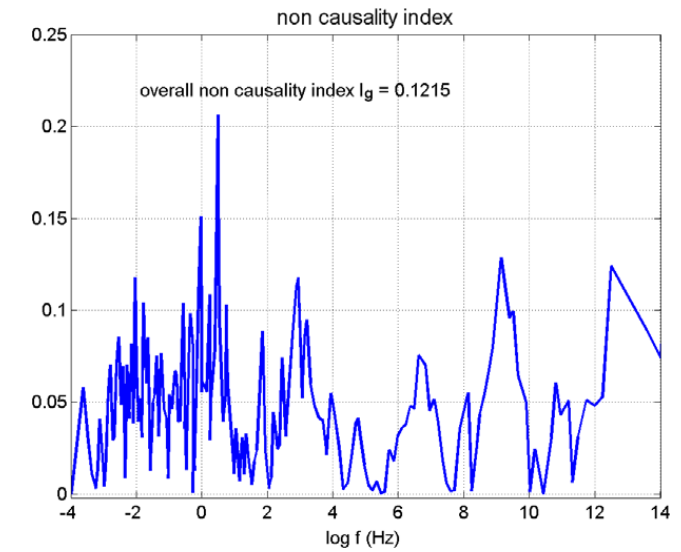
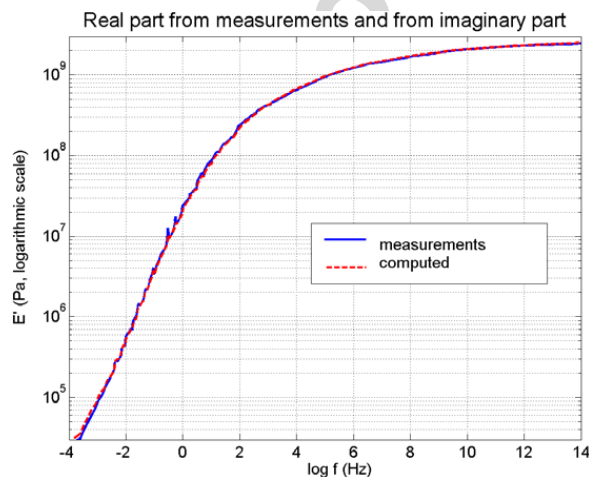


Fig. 8. Index estimating the distance to causality in the experimental data.

Frequencies for $\log f > 14$ are not represented in Fig. 8. The weight of high frequencies in Eq. (8) is low, which makes index I_g a good complement to the plot of I_n .

• Material #3 (Epoxy resin)

Out two measurement data sets, one is of average quality and the other (bitumen) of good quality. We shall now study a data set of poor quality and:

- show how index I_n is representative of the curve quality and allows for the detection of potential problems.

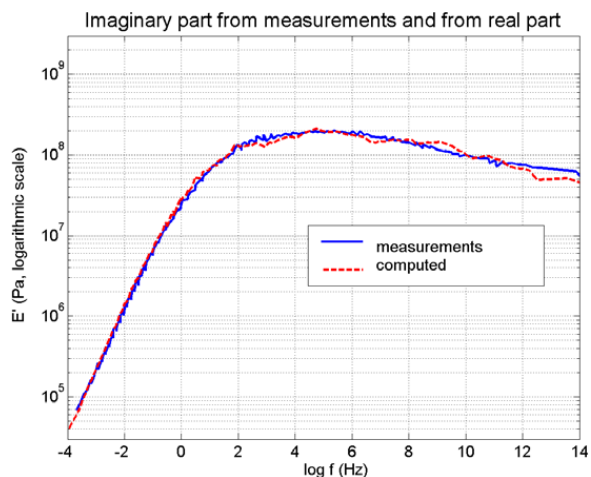


Fig. 7. Real and imaginary parts – computed from the Hilbert transform and measured.

- show the impact of computational assumptions on the index (In).

We shall start from the raw measurements of E' and E'' at 26 different temperatures ranging from 50 °C to 200 °C (Fig. 9).

Two algorithms were used to build the master curves. The first one (processing #1) led to the master curves of the two aforementioned materials. It processes the real and the imaginary components simultaneously and uses a polynomial approximation to represent the logarithm of the shift function $\log(\alpha_T)$. The other algorithm (processing #2) generates a master curve from the real part only and without any smoothing of the shift function, then computes the imaginary part from the Hilbert trans-

form. Results are shown in Fig. 10 (different y-axis scales).

Both types of master curves have their advantages and drawbacks: with processing #1, real part values are scattered after the vitreous transition, whereas with processing #2, imaginary values are scattered in the low frequency domain. In Fig. 11, it is clear that the non-causality index In for processing #1 attains high values in regions where the building of master curves met some problems: $\log f < -2$, $\log f > 12$. This observation is consistent with the preceding examples, though in a more difficult context.

Processing #2 in Fig. 11 provides additional information: based on the way it was built up, index In should remain equal to zero for any value after

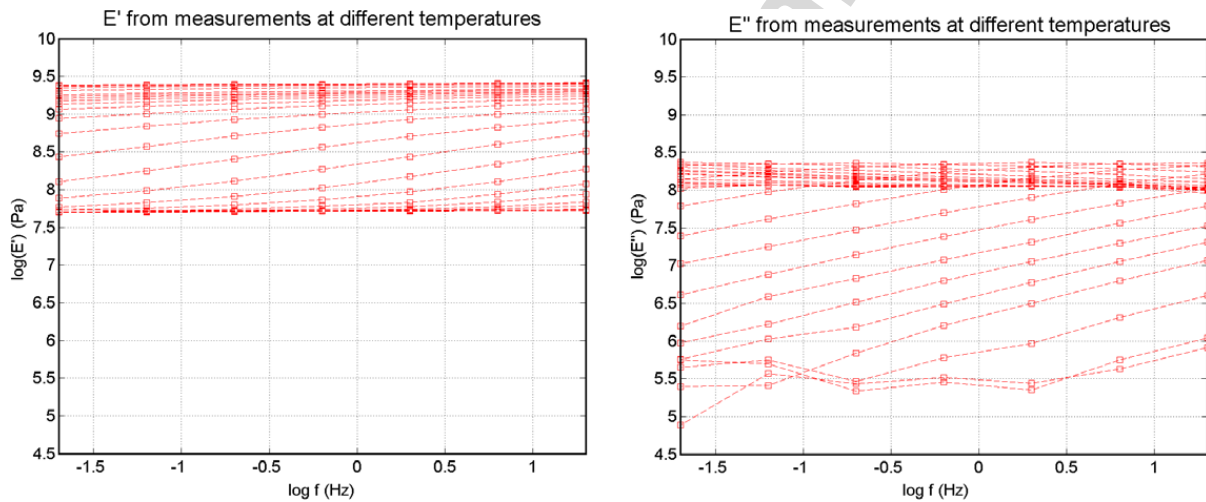


Fig. 9. Experimental data.

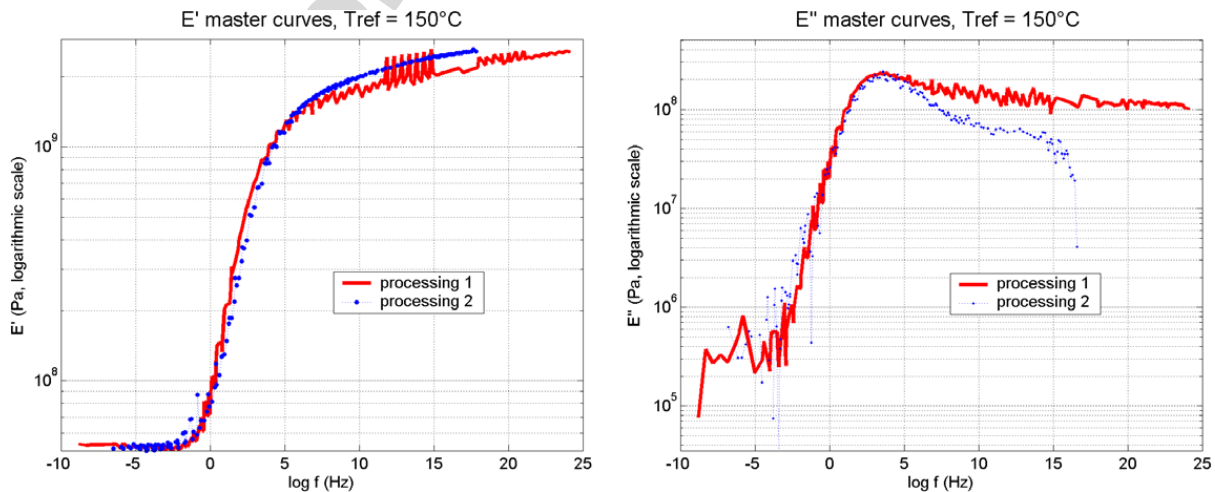


Fig. 10. Master curves after two different types of processing of the original data.

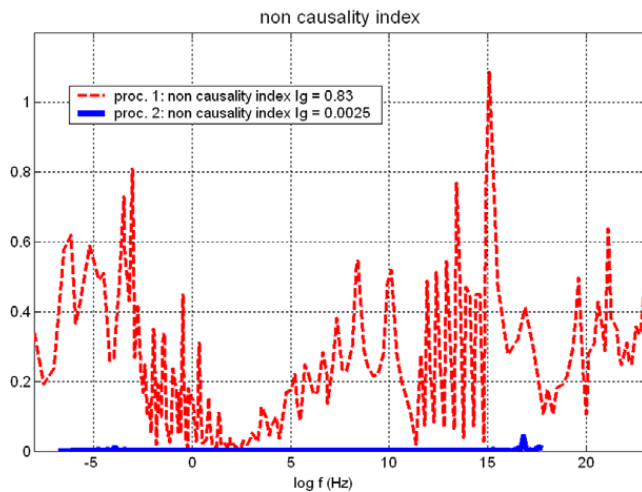


Fig. 11. Non-causality index for both types of processing.

processing #2, since the imaginary part is derived from the real part using the causality relation. Now, the test concerns not the causal quality of the result, but the systematic error introduced by the computation technique. Our assumption of piecewise linear functions generates an error (Section 4.1), even when there is perfect causality of the data. In practice, the problem is of little importance. The error vanishes with the frequency step as is clear from Appendix 2. It remains negligible compared to variations of physical origin, as shown in Fig. 11 (see processing #2 compared to processing #1).

The correlation of high values of I_n to problems in the master curves is clear enough and the computational error in index I_n is kept to a sufficiently low level in a case of practical interest to consider I_n as an efficient and robust index despite the simplifying assumptions that were used.

5. Conclusion and perspectives

5.1. Established facts

Research carried out on causality in DMA measurements has led to the development of tools based on the semi-analytical integration of Hilbert integrals (Matlab™ programs):

- to generate the phase from the magnitude only;
- to create a local (frequency) index and a global index to assess data quality.

Performed tests have demonstrated the operational character of the various tools. The phase calculation procedure showed that a simpler and faster

experimental technique was possible, based on the single measurement of magnitude.

The most promising point appears to be the building of a global index and of a local index assessing the quality of measurements.

- Out three data sets, the value of global index I_g ranges from 0.12 to 0.83 and shows a good correlation with visual observations on the curves.
- The local index, I_n , is well correlated with the localization and amplitude of defects. As such, it provides an estimate for the *degree of reliability of data by frequency range*. In some cases, it will probably evidence a difficulty in applying the WLF principle and in building the master curves (material #3). Previous works (Caracciolo and Giovagnoni, 1996; Caracciolo et al., 2001) indeed showed causality to be a pertinent constraint for building the master curves and therefore a pertinent criterion for assessing the quality of master curves.

5.2. Perspectives

5.2.1. Simpler measurements

All techniques should allow to implement simpler DMA for small distortions of materials with well-understood linear rheology. It would rely on a set of new procedures: measurement of the modulus magnitude, $|E|$, determination of the shift function, then of the phase, from this single measurement.

5.2.2. More reliable master curves

Both components of the complex modulus E are now measured. The building of master curves remains the key point of rheology. To get improved master curves, we shall consider this question as an optimization problem that would take into account causality in the cost function. Non-causality indices I_n and I_g built here could be useful in this context, by yielding the exact local or global cost for non-causality.

Within the complex function space, all causal functions, such as $\overline{TH\{E\}} + iE = 0$, make up a sub-space (a hyperplane). A possible processing of measured functions would be to bring them back onto this plane. The simple algebraic projection

$$E_{\text{causal}} = \frac{1}{2}E + \frac{1}{2}iTH\{E\}$$

satisfies Eq. (A.2) in Appendix 1. It is currently under study as a method for data cleaning.

5.2.3. Time functions

The analytical-numerical calculation technique for Hilbert transforms over a very large frequency range can also be applied to Fourier transforms. Creep and relaxation curves could then be obtained from master curves, in a rigorous and non-approximate fashion, unlike in the work (Schapery and Park, 1999). Research works on this topic are underway.

Acknowledgement

We would like to acknowledge the anonymous reviewer for his very useful advice.

Appendix 1. Establishment of causality relations

Physical causality implies that function $I(t)$ is equal to zero for $t < 0$. Hence

$$H(t)I(t) = I(t)$$

where $H(t)$ is the Heaviside unit step.

By Fourier transform, it becomes:

$$\frac{1}{2\pi}f(\omega) * TF\{H(t)\} = f(\omega)$$

The Fourier transform of $H(t)$ is known: $TF\{H(t)\} = \frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)$ (see Dautray and Lions, 1984, p. 1391), which yields:

$$\frac{1}{2\pi}f(\omega) * \left(\frac{1}{i\omega}\right) + \frac{1}{2}f(\omega) = f(\omega)$$

After reorganization:

$$if(\omega) * \left(-\frac{1}{\pi\omega}\right) = f(\omega) \quad (\text{A.1})$$

From the definition of Hilbert transform, (A.1) is rewritten:

$$\boxed{iTH\{f\} = f} \quad (\text{A.2})$$

This formula shows that the transfer function f is its own Hilbert transform, to within the i factor.

Eq. (A.2) can be written as follows:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{\pi(\omega - u)} du = if(\omega) \quad (\text{A.3})$$

f is a complex function: $f = \text{Re}f + i\text{Im}f$.

Being the Fourier transform of a real function (I), f has an even real part and an odd imaginary part, from which we can conclude:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Re}f(u)}{\pi(\omega - u)} du &= \int_{-\infty}^0 \frac{\text{Re}f(-u)}{\pi(\omega - u)} du + \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re}f(u)}{\pi(\omega - u)} du \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{\text{Re}f(u)}{\pi(\omega - u)} + \frac{\text{Re}f(u)}{\pi(\omega + u)} \right] du \\ &= 2\omega \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re}f(u)}{\pi(\omega^2 - u^2)} du \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Im}f(u)}{\pi(\omega - u)} du &= \int_{-\infty}^0 -\frac{\text{Im}f(-u)}{\pi(\omega - u)} du + \int_0^{+\infty} \frac{\text{Im}f(u)}{\pi(\omega - u)} du \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{\text{Im}f(u)}{\pi(\omega - u)} - \frac{\text{Im}f(u)}{\pi(\omega + u)} \right] du \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{u\text{Im}f(u)}{\pi(\omega^2 - u^2)} du \end{aligned}$$

Eq. (A.3) is then expressed using two relations, called the Kramers–Kronig relations (Reinhard, 1986):

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\text{Re}f(u)}{u^2 - \omega^2} du &= \text{Im}f(\omega) \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{u\text{Im}f(u)}{\omega^2 - u^2} du &= \text{Re}f(\omega) \end{aligned}} \quad (\text{A.4})$$

Let V be the complex logarithm of the complex function f : $V = \text{Log}f$.

If the phase of f is ϕ , then: $f = |f|e^{i\phi}$ and $V = \ln|f| + i\phi$. Let us show that $U(t)$, the inverse Fourier transform of V , is causal (i.e., equal to zero for $t < 0$), under some conditions.

Let us differentiate V with respect to ω : $\frac{dV}{d\omega} = \frac{df}{d\omega} \frac{1}{f}$.

Taking the inverse Fourier transform of this expression, and calling $K(t)$ the inverse Fourier transform of $\frac{1}{f}$, one gets:

$$-itU(t) = (-itI(t)) * K(t)$$

or

$$tU(t) = \int_0^{+\infty} wI(w)K(t - w)dw$$

The causality of $U(t)$ is certain under two conditions: $\frac{1}{f}$ has an inverse Fourier transform $K(t)$, and

$$\int_0^{+\infty} wI(w)K(t - w)dw = 0 \quad \text{for } t < 0$$

Due to the causality of I , the latter condition holds if $K(t)$ is causal. Then, $tU(t) = \int_0^t wI(w)K(t - w)dw$.

It is known in signal processing theory that for K to be causal, f should fulfill the Paley–Wiener condition: $|\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\ln(|f(\omega)|)}{1 + \omega^2} d\omega| < +\infty$ (Max and Lacoume, 1996; Reinhard, 1986). This implies some conditions on the poles and zeros of the function f . But from a physical point of view, the key relationship is the

causality of K : the inverted system with transfer function $\frac{1}{f}$ is a causal one. In our viscoelastic material context, this means creep is a causal phenomenon, and the derivative of the creep function (K) exists as a ‘generalized function’ or ‘distribution’. Under the latter conditions, $U(t)$ is a causal function. Eqs. (A.2) and (A.4) can then be applied to its Fourier transform (exact Bode relationships):

$$iTH\{\text{Log } f\} = \text{Log } f \quad (\text{A.5})$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\ln |f(u)|}{u^2 - \omega^2} du &= \phi(\omega) \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{u\phi(u)}{\omega^2 - u^2} du &= \ln |f(\omega)| \end{aligned}}$$

(A.4) and (A.5) are necessary conditions for causality.

Appendix 2. Selection of interval limits for discretized calculations

The assumption that assimilates a function that has a continuous derivative with a function that is linear by parts results in deviations of the Hilbert transform. These deviations are distributed over all frequencies, given the integral character of the transform.

Let f be the original function and f_d its piecewise linear approximation. We assume that f is a continuous function, as well as its derivatives up to a high order. We shall demonstrate that in this borderline case, the disturbance occurring on the Hilbert transform of f_d is minimum at the center and at both ends of the interval.

The difference between f and f_d is the function $e(\omega)$:

$$e(\omega) = f(\omega) - f_d(\omega)$$

We assume that this is a periodic function, which is a valid approximation provided the intervals are of the same length and provided this length is small compared to the characteristic distance of variation of the radius of curvature.

Let us have the origin at the center of an interval of length $2c$. This will have no influence, since the Hilbert transform remains unchanged after a translation.

The deviation function is equal to zero at the ends of the interval. It can be written as a Taylor development in 0, limited to order 3, and subjected to this stress

$$\begin{aligned} e(\omega) &= a(1 - \omega^2/c^2) + b\omega(1 - \omega^2/c^2) + O(\omega^4) \\ &\quad \text{for } \omega \in [-c, c] \text{ (} a, b \text{ any real number, } c > 0) \\ e(\omega) &= a(1 - (\omega - 2nc)^2/c^2) + b(\omega - 2nc) \\ &\quad \times (1 - (\omega - 2nc)^2/c^2) + O((\omega - 2nc)^4) \\ &\quad \text{for } \omega \in [-c + 2nc, c + 2nc] \text{ (} n \text{ an integer)} \end{aligned}$$

The condition of a small interval length compared to the characteristic distance of variation of the radius of curvature can be written as follows:

$$\begin{aligned} 2c \left| \frac{d^3 e}{d\omega^3} \right| &\ll \max_{\omega} \left(\left| \frac{d^2 e}{d\omega^2} \right| \right) \quad \forall \omega \\ 2c \left| \frac{6b}{c^2} \right| &\ll \max_{\omega} \left(\left| -\frac{6b\omega}{c^2} - \frac{2a}{c^2} \right| \right) \\ 6|b|c &\ll 3|b|c + |a| \\ 3|b|c &\ll |a| \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

The Fourier transform of the periodic function $a(1 - \omega^2/c^2)$ is known:

$$\begin{aligned} a \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) &= \frac{2}{3}a + \frac{4c}{\pi^2}a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{n\pi\omega}{c} \\ &\quad \text{for } \omega \in [-c, c] \end{aligned}$$

The derivative of $b\omega(1 - \omega^2/c^2)$ is $b(1 - 3\omega^2/c^2) = 3b(1 - \omega^2/c^2) - 2b$, hence, by applying the above formula, the Fourier series becomes:

$$\begin{aligned} b(1 - 3\omega^2/c^2) &= \frac{12bc}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{n\pi\omega}{c} \\ &\quad \text{for } \omega \in [-c, c] \end{aligned}$$

and after integration:

$$\begin{aligned} b\omega(1 - \omega^2/c^2) &= \frac{12bc^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin \frac{n\pi\omega}{c} \\ &\quad \text{for } \omega \in [-c, c] \end{aligned}$$

Finally:

$$\begin{aligned} e(\omega) &= \frac{2}{3}a + \frac{4c}{\pi^2}a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos \frac{n\pi\omega}{c} \\ &\quad + \frac{12bc^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \sin \frac{n\pi\omega}{c} \\ &\quad \text{for } \omega \in [-c, c] \end{aligned}$$

The Hilbert transforms of a constant and of a sinus function are known. Due to the linearity of the transform, one can derive:

$$TH\{e(\omega)\} = \frac{4c}{\pi^2} a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \sin \frac{n\pi\omega}{c} - \frac{12bc^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \cos \frac{n\pi\omega}{c}$$

This function consists of two components:

- An odd part for $\sin(n\pi\omega/c)$, which is equal to zero for $\omega = 0$ and $\omega = pc$ (p is an integer), hence at the ends of the intervals and at their centers. See Fig. A.1 above, plotted for $a = c = 1$, $b = 0$.
- An even part for $\cos(n\pi\omega/c)$, which is not usually and predictably equal to zero, and the absolute value of which is equal to

$$\frac{12bc^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^3} \simeq 0.349bc^2$$

for 0 and $2pc$ (centers)

$$\frac{12bc^2}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \simeq 0.465bc^2 \quad \text{for } (2p+1)c \quad (\text{ends})$$

Let us compare these values to those of the first component: an estimate is available for point $\omega = c/2$, where this component is equal to $\frac{4c}{\pi^2} a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \simeq 0.371ca$.

Based on Eq. (A.6), the first component is always much greater than the estimated deviations with respect to the center and to the ends. Fig. A.2 provides an example with a deliberately large contribution of the even part of $TH\{e\}$: $|b|c/|a| = 1/4$.

Therefore, calculations of the transform carried out according to the algorithm described in Sections 3.1 and 4.1 at the center or at the ends yield opti-

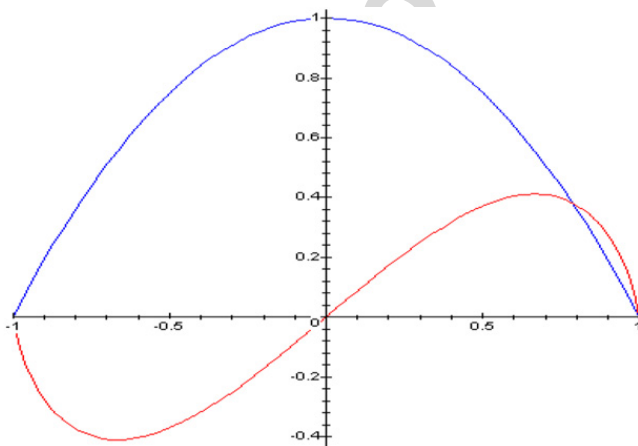


Fig. A.1. $e(\omega)$ and its Hilbert transform over one period, for e , even function of ω .

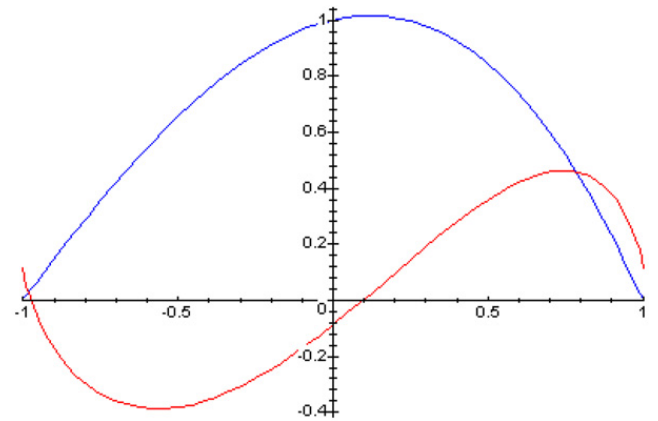


Fig. A.2. $e(\omega)$ and its Hilbert transform over one period, $a = c = 1$, $b = 1/4$.

mum results; the deviation to the exact value tends to zero at these points with the following assumptions: “regular gridding” and “small relative variation of the radius of curvature on a grid cell”.

Appendix 3. Analytical validation of the real part transform algorithm

We tried to determine whether the procedure described in Sections 3.1.2 and 4.1 yields good results for an ideal case of exactly calculated function.

To do so, we used the complex Young's modulus: $E(\omega) = \frac{i\omega}{1+i\omega}$ giving the relaxation function $J(t) = H(t)e^{-t}$.

Both curves represent the exact imaginary part and the Hilbert transform of the real part resulting from our algorithm. They are perfectly superimposed (Fig. A.3) except for the very high frequency

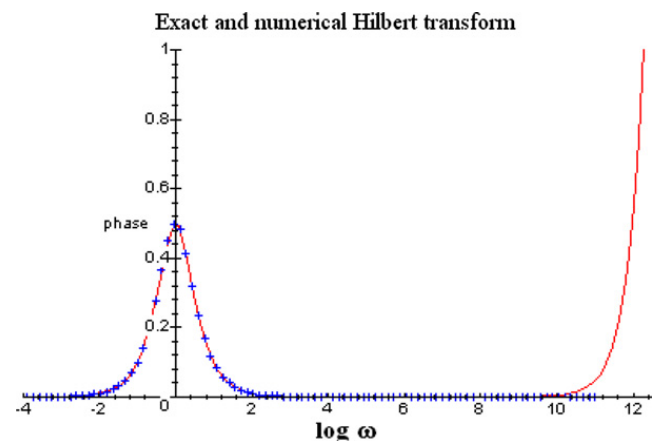


Fig. A.3. Comparison of exact and computed Hilbert transform for a simple form. Computed = line, Exact = points.

domain, where the calculation extrapolation for off-interval data is not correct. The calculation was carried out with Maple™ with a 12 significant digit precision, few points (100 points regularly distributed over a logarithmic scale), over a 16-decade range.

References

- Boche, H., Protzmann, M., 1997. A new algorithm for the reconstruction of bandlimited functions and their Hilbert transform. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement* 46 (2), 442–444.
- Booij, H.C., Thoone, G.P.J.M., 1982. Generalization of Kramers–Kronig transforms and some approximations of relations between viscoelastic quantities. *Rheologica Acta* 21 (1), 15–24.
- Caracciolo, R., Giovagnoni, M., 1996. Frequency dependence of Poissons's ratio using the method of reduced variables. *Mechanics of Materials* 24, 75–85.
- Caracciolo, R., Gasparotto, A., Giovagnoni, M., 2001. Application of causality check and of the reduced variables method for experimental determination of Young modulus of a viscoelastic material. *Mechanics of Materials* 33, 693–703.
- Castro, F., Nabet, B., 1999. Numerical computation of the complex dielectric permittivity using Hilbert Transform and FFT techniques. *Journal of the Franklin Institute* 336 (B), 53–64.
- Dautray, R., Lions, J-L., 1984. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, tome 1. Masson, Paris.
- Eyre, D.J., Milton, G.W., Lakes, R.S., 2002. Bounds for interpolating complex effective moduli of viscoelastic materials from measured data. *Rheologica Acta* 41, 461–470.
- Fannin, P.C., Molina, A., Charles, S.W., 1993. On the generation of complex susceptibility data through the use of the Hilbert Transform. *Journal of Physics D: Applied Physics* 26, 2006–2009.
- Fellah, Z.E.A., Berger, S., Lauriks, W., Depollier, C., 2004. Verification of Kramers–Kronig relationship in porous materials having a rigid frame. *Journal of Sound and Vibration* 270, 865–885.
- Kuc, R., 1984. Modeling acoustic attenuation of soft tissue with a minimum-phase filter. *Ultrasonic Imaging* 6 (1), 24–36.
- Max, J., Lacoume, J.-L., 1996. *Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*, fifth ed. Masson, Paris.
- Parot, J.-M., Bondoux, D., Finzy, M., Grangier, H., 1989. Use of basic properties for experimental admittance data processing. In: *Proc. of Conference ASME, Montréal*.
- Perry, A.P., Brazil, T.J., 1998. Forcing causality on S-parameter data using the Hilbert Transform. *IEEE Microwave and Guided Wave Letters* 8 (11), 378–380.
- Pritz, T., 2005. Unbounded complex modulus of viscoelastic materials and the Kramers–Kronig relations. *Journal of Sound and Vibration* 279, 687–697.
- Reddy, G.R., Swamy, M.N.S., 1991. Hilbert Transform relations for complex signals. *Signal Processing* 22, 215–219.
- Reinhard, H., 1986. *Cours de mathématiques du signal*. Dunod, Paris.
- Scaife, B.K.P., 1989. *Principles of Dielectric*. Oxford Science, London.
- Schapery, S.A., Park, S.W., 1999. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part II – An approximate analytical method. *International Journal of Solid and Structures* 36, 1677–1699.
- Tomlinson, G.R., 1987. Developments in the use of the Hilbert transform for detecting and quantifying non-linearity associated with frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing* 1 (2), 151–171.
- Van der Noot, T.J., 1992. Hilbert transformation of immittance data using the fast Fourier Transform. *Journal of Electroanalytical Chemistry* 322, 9–24.
- Vinh, T., Haoui, A., Fei, B.J., Chevalier, Y., 1984. Extension de l'analyse modale aux systèmes non linéaires par la transformation de Hilbert. *Matériaux, Mécanique, Electricité* 404–406, 5–14.
- Weideman, J.A.C., 1995. Computing the Hilbert transform on the real line. *Mathematics of Computation* 64, 745–762.
- Zolnai, Z., Macura, S., Markley, L., 1990. Phasing two- and three-dimensional NMR spectra by use of the Hilbert transform can save computer time and space. *Journal of Magnetic Resonance* 89, 94–101.

Annexe 2 : Liste des publications

Les articles de revue sont signalés en gras, les congrès avec actes en italiques.

Mécanique vibratoire

L. GAUDRIOT, J-M PAROT: **L'évolution des méthodes d'étude des systèmes vibratoires. Principes de la synthèse modale de structures vibrantes.** *Revue française de Mécanique* , n° 60, 1976, p. 9-27.

C. AVALLET, J-M PAROT : **Recherche d'ondes naturelles de coques cylindriques raidies périodiquement.** *Journées d'Etude sur la Propagation Acoustique (JESPA) 1982, le Havre, et Revue du Cethedec n° 71, p 159-173.*

C. AVALLET, J-M PAROT : *Etude, par une méthode de matrices de transfert, des vibrations in vacuo de coques cylindriques minces périodiquement raidies. Onzième ICA (International Congress in Acoustics), Paris-Lyon-Toulouse 1983, Vol. 10, p. 221-224*

J-M PAROT, D. VAUCHER DE LA CROIX : **Sur la dynamique de structures ramifiées simples.** *Journées d'Etude sur la Propagation Acoustique (JESPA), Lyon 1986, GAMI « Vibrations-Chocs », Lyon 1986, et Mécanique, Matériaux et Electricité n° 416, 1986, p 52-54.*

J-M PAROT, D. BONDOUX: *Structural broad band fields by vibratory rays. 17th International Seminar on Modal Analysis. "Experimental and numerical dynamic analysis", Louvain septembre 1992, Part I, p. 159-174.*

D. BONDOUX, J-M PAROT, R. AQUILINA: *Vibration large bande de treillis par exploitation de la méthode des rayons. 4^{ème} congrès international sur l'intensimétrie, Senlis, août 1993, p.85-94.*

J-M PAROT, C. THIRARD: *Ray techniques for modelling vibratory fields. EURONOISE 95, Lyon, mars 1995, p. 453-456.*

T. MAZOYER, J-M PAROT, N. TROMPETTE: *Theoretical and experimental study of brake induced wheel corrugation of a tread-braked train. Journées européennes du freinage, Lille, décembre 1998.*

J-M PAROT, T. MAZOYER, N. TROMPETTE: *Modélisation d'une source de bruit ferroviaire: l'usure ondulatoire de la bande de roulement sur les trains à freinage par semelle. 5ème CFA, Lausanne, septembre 2000, p. 327-330.*

Mécanique des fluides et milieux complexes

F. BOULOT, J-M PAROT, J-P BENQUE: Modèles mathématiques bidimensionnels d'écoulements à une ou deux couches. Association Internationale de Recherche Hydraulique (AIRH) 1975, Sao Paulo.

J-M PAROT : Contribution à l'étude des écoulements bidimensionnels quasi-horizontaux de deux couches de densités différentes. Thèse Paris VI, 1976

F. BOULOT, J-P BENQUE, J-M PAROT : *Un modèle mathématique des courants dans une eau stratifiée en bicouche. XIV^{èmes} Journées de l'Hydraulique, Question II, rapport 3 (6 pages). Société Hydrotechnique de France (SHF), 1976, Paris.*

J-M PAROT : **Quelques aspects des écoulements bicouches quasi-horizontaux et de leur calcul. La Houille Blanche, 1976 (n°1), p.53-58.**

J-M PAROT : *Modèle simplifié d'affouillement local en milieu sableux sous courant constant ou variable. Septième congrès français de Mécanique, Bordeaux 1985 p. 101-104.*

J-M PAROT : *Optimality and scaling laws in a circulatory network. . 1st European conference on "Mathematics applied to biology and medicine". Grenoble, janvier 1991, p. 107-109.*

B. GARNIER, J-M PAROT: *Dynamic behaviour of saturated sea beds: modelizations for prediction and characterization. A.I.O.M. Symposium on Marine and offshore Engineering, Gênes, juillet 92, p. 117-123.*

B. GARNIER, J-M PAROT: *From acoustic and dynamic properties of saturated seabeds to geotechnical characterizations and predictions. International conference on Acoustic classification and mapping of the seabed. University of Bath, avril 1993, p. 453-462.*

Couplage fluide-structure et Acoustique

H. ARBEY, J. DELCAMBRE, R. MICHAUD, M. MOREAU, L. PARGAMIN, J-M PAROT : *Les bruits éoliens des lignes électriques. Conférence Internationale des Grands Réseaux Electriques (CIGRE), Stockholm, 1981. (232-05, 6 pages).*

H. DEBEURET, J-M PAROT, E. RIEUTORD: *Etude de l'interaction d'une onde de choc cylindrique faible avec une coque immergée. Cinquième congrès français de Mécanique, Marseille, 1981, p. 325-326.*

J. DELCAMBRE, J-M PAROT, H. ARBEY : *Emission d'un son pur par un système à cavités périodiques ouvertes soumis à un écoulement. Euromech 142, Lyon 1981, Abstract 5.2.*

J-M PAROT, H. DEBEURET : *Calcul de la réponse dynamique d'une coque à une onde acoustique à front raide. Tendances actuelles en calcul des structures, Sophia-Antipolis, 1982 (8 pages).*

J-M PAROT : **Calcul de la réponse dynamique d'une coque à une onde d'explosion. Journées d'études GAMI « Vibrations-Chocs », Lyon 1982, et Mécanique, Matériaux et Electricité n° 389-390-391, 1982, p 343-348.**

H. ARBEY, J. DELCAMBRE, L. PARGAMIN, J-M PAROT : **Son pur émis par un système de cavités périodiques ouvertes soumis à un écoulement. Revue d'Acoustique n° 67, 1983, p. 243-246.**

P. AILLAUD, P. VERPEAUX, J-M PAROT, B. BARBE : *Calcul de la diffraction d'onde par un corps de forme quelconque. Onzième ICA (International Congress in Acoustics), Paris-Lyon-Toulouse 1983, Vol. 1, p. 121-124.*

H. ARBEY, J-M PAROT, J. DELCAMBRE: *Emission sonore d'un système de cavités périodiques ouvertes. Onzième ICA (International Congress in Acoustics), Paris-Lyon-Toulouse 1983, Vol. 1, p. 291-294.*

C. AVALLET, J-M PAROT : *Analyse vibratoire et acoustique par une méthode de matrices de transfert, de coques à renforts périodiques immergées dans un fluide lourd et compressible. Onzième ICA (International Congress in Acoustics), Paris-Lyon-Toulouse 1983, Vol. 5, p. 21-24.*

J. LARCHER, J-M PAROT : *Qualités acoustiques d'une coque immergée vis à vis de sources internes ou liées à un écoulement. Onzième ICA (International Congress in Acoustics), Paris-Lyon-Toulouse 1983, Vol. 2, p. 381-384.*

C. AVALLET, J-M PAROT : *Application de la méthode des matrices de transfert à l'étude acoustique et vibratoire de coques cylindriques raidies immergées dans un fluide lourd et compressible. Sixième congrès français de Mécanique, Lyon 1983, p. 9/13 -9/16.*

J. LARCHER, J-M PAROT : *Aberration de directivité acoustique due à une coque élastique mince. Sixième congrès français de Mécanique, Lyon 1983, p. 9/29 – 9/32.*

J. LARCHER, J-M PAROT, J-P BERHAULT : *Experimental study of internal noise on a shell submitted to boundary layer excitation. Congrès de l'ASA (American Society of Acousticians), San Diego, 1983.*

D. FICHOT, J-M PAROT : *Calcul bidimensionnel de la perturbation de rayonnement apportée par une enceinte. Douzième ICA (International Congress in Acoustics), Toronto 1986, (D3-5, 2 pages) et Journées d'Etudes DRET/CNRS, Marseille 1986.*

J-M PAROT, D. VAUCHER DE LA CROIX, S. GRIOTIER, P. VERPEAUX : *Acoustique tridimensionnelle de surfaces rigides ou inertielles : formulation intégrale et schéma explicite en temps, suivis d'analyse fréquentielle. Numeta (Numerical Methods in Engineering and Applications), Swansea 1987, Vol. 2, T30 (7 pages).*

D. VAUCHER DE LA CROIX, J-M PAROT: *Calcul de diffraction et de rayonnement, à l'aide d'une formule intégrale temporelle. Inter-Noise 1988, Avignon, août 1988, p. 371-374.*

D. DOIZELET, J. LARCHER, J-M PAROT: *Modèles d'écrans acoustiques par équations intégrales couplées aux éléments finis. Strucome 88, Paris, novembre 1988, Vol. 1, p. 269-276.*

J-M PAROT: Towards a new approach of statistical fields modelling. XIIIème ICA, Belgrade, août 1989 (4 pages).

J. LARCHER, J-M PAROT: **Interaction entre le champ hydrodynamique dû à une explosion et un corps élastique immergé. GAMI, Lyon, juin 1990, et Mécanique, Matériaux et Electricité n°434, mai-juin 1990, p. 61-63.**

D. VAUCHER DE LA CROIX, L. PERRET, J-M PAROT: *Fluid-Structure interaction applied to the analysis of a test panel typical for spatial application. Congrès ESA, Noordwijk, avril 1991, SP-321, Vol. 2, p. 933-937.*

D. VAUCHER DE LA CROIX, L. PERRET, J-M PAROT: Résolution de problèmes couplés fluide-structure par une approche temporelle. Application à un cas typique de structure spatiale. Congrès CETIM, Senlis, 1991.

VAUCHER DE LA CROIX, C. CLERC, J-M PAROT: *Time domain approach of fluid-structure interaction phenomenas. Application to satellite structures. Second International Congress on recent Developments in Air-& Structure-borne Sound and Vibration, Auburn, Alabama, mars 1992, Editors M. J. Crocker et P. K. Raju, p. 499-506.*

J-M PAROT: *How accurate can be ray computation in the atmosphere? EURONOISE 95, Lyon, mars 1995, p.277-282.*

D. FICHOT, D. VAUCHER DE LA CROIX, J-M PAROT: *Traitement des problèmes numériques dus aux ondes évanescentes dans les méthodes de type matrice de transfert. 4^{ème} Congrès Français d'Acoustique, Marseille, avril 1997, Vol. 2, p. 703-706.*

F. POLONIO, T. LOYAU, J-M PAROT, G. GOGU: *Calculation of the acoustic radiation of structures with openings. Internoise 2000, Nice, août 2000, p. 2653-2660.*

F. POLONIO, T. LOYAU, J-M PAROT, G. GOGU: Validation numérique et expérimentale d'une méthode de calcul. 6ème CFA, Lille, avril 2002.

F. POLONIO (G. GOGU, J-M PAROT co-encadrants): Calcul du rayonnement acoustique d'une structure d'épaisseur moyenne comportant des ouvertures. Thèse de doctorat présentée le 02/05/2002 devant l'Université Blaise Pascal

J-M PAROT : *Numerical experiments on Time Reversal Localization of Impulse Sources in an Open Space. Joint Congress SFA-DAGA, 7^{ème} CFA, Stasbourg, mars 2004, Vol. 2, p. 1181-1182.*

F. POLONIO, T. LOYAU, J-M PAROT, G. GOGU: **Prévision du rayonnement acoustique en basse fréquence de structures ouvertes. Acoustique et Techniques n°36, mars 2004, p. 37-43.**

F. POLONIO, T. LOYAU, J-M PAROT, G. GOGU: **Acoustic radiation of an open structure: modelling and experiments. Acta Acustica united with Acustica, vol 90, 2004, p. 496-511.**

A. PELLICIER, T. LOYAU, J-M PAROT: *Application of Fast Multipole Methods for Acoustic Radiation Problems. Com. n° 57, Congrès Novem, Saint-Raphaël, Avril 2005, 11 pages.*

PELLICIER A. (G. GOGU, J-M PAROT co-encadrants): Algorithme de calcul accéléré pour les structures rayonnantes à vibration sous-critique. Thèse de doctorat présentée le 26/01/07 devant l'Université Blaise Pascal.

J-M PAROT, C. THIRARD, C. PUILLET: **Elimination of a non-oscillatory instability in a retarded potential integral equation. Engineering Analysis with Boundary Elements, 31/2, 2007, p. 133-151.**

J-M PAROT, A. PELLICIER: *Fast multipole method for acoustic computations. 19th ICA (International Congress on Acoustics), Madrid, septembre 2007, Conférence invitée, 6 pages.*

J-M PAROT, A. PELLICIER, T. LOYAU, G. GOGU: Fast mutipole method for acoustic radiation computations. Proposé à Acta Acustica united with Acustica, juillet 2007.

Traitements de mesures

J-M PAROT, D. BONDOUX, M. FINZY, H. GRANGIER: *Use of basic properties for experimental admittance data processing. ASME, Montréal, septembre 1989, Vol. 18-5, p. 61-68.*

J-M PAROT: **Une distance entre systèmes linéaires. J. d'Acoustique (3) 1990, p. 9-15.**

J-M PAROT: *Software toolkit for the study of neural networks. 1st European conference on "Mathematics applied to biology and medicine". Grenoble, janvier 1991, p. 89-91.*

J-M PAROT, C. THIRARD, B. VINCENT: *A neural network estimating the psychoacoustical annoyance from physical data. "Intelligent Vehicles'92", Detroit, juillet 92 (5 pages).*

C. THIRARD, J-M PAROT, B. VINCENT, M. VALLET: *The use of a neural network in order to estimate he noise annoyance from physical data. Internoise, Toronto, juillet 92, p. 1107-1110.*

M. VALLET, C. THIRARD, J-M PAROT: *Objectivation de la gêne acoustique par réseau neuronal. Journées d'étude SIA. Courbevoie, janvier 1993(6 pages).*

J-M PAROT: Objectivation de la gêne acoustique par réseau neuronal : Une méthode adaptative pour l'estimation du confort. Journées SIA « Automobile et environnement », Sochaux, Conférence invitée, février 1994.

B. GARNIER, B. DUPUY, C. THIRARD, J-M PAROT: *Objective vibro-acoustic comfort assessment by means of a neural network. WCRR '94/Congrès mondial de la Recherche Ferroviaire, Paris, novembre 1994 (6 pages).*

B. P. DUPUY, C. THIRARD, J-M PAROT, B. GARNIER: Mesure de la gêne sur un passager dans le domaine aéronautique. Workshop Bruit/Son et Vibration dans les habitacles d'automobile, Marseille, mai 95.

B. GARNIER, B. DUPUY, CH. THIRARD, J-M PAROT: *Objective vibro-acoustic comfort assessment by means of a neural network. 3ème Congrès SIA (Méthodologies et techniques de simulation numérique: contribution au développement automobile), Paris, mai 1996 (7 pages).*

J-M PAROT, B. DUPERRAY: **Applications of exact causality relationships to materials dynamic analysis. Mechanics of Materials, vol. 39/5, 2007, p. 419-433.**

J-M PAROT: **Localizing impulse sources in an open space by time reversal with very few transducers. Applied Acoustics, vol. 69/4, 2008, p. 311-324.**

J-M PAROT, B. DUPERRAY: **Exact computation of creep compliance and relaxation modulus from complex modulus measurement data. Mechanics of Materials, vol. 40/7, 2008, p. 575-585.**

Cité en remerciements :

B. BALIGAND: *Classification d'hélicoptères en vol par réseaux de neurones. 14ème GRETSI, septembre 1993, p. 811-814.*

B. BALIGAND: *Deux application des réseaux de neurones: classification d'hélicoptères en vol et évaluation de la gêne acoustique. TEC 94, Grenoble, octobre 94, p. 81-90.*

Annexe 3 : Agrément au Crédit d'Impôt Recherche

A/ Liste des organismes privés bénéficiant de l'agrément au crédit d'impôt-recherche en 2001 en région Auvergne

CASIMIR TECHNINAUV
24 AVENUE DES LANDAIS B.P. 154
63173 AUBIERE
GÉNIE DES MATÉRIAUX
AGREE 1999-2001

CENTRE NATIONAL D'ÉVALUATION DE PHOTO PROTECTION
CNEP
24 AVENUE DES LANDAIS
63177 AUBIERE CEDEX
GÉNIE DES MATÉRIAUX GÉNIE CIVIL MÉCANIQUE ACOUSTIQUE
AGREE 1999-2003

EPHARMA
EP
ZI LE MALCOURLER
03800 GANNAT
SCIENCES MÉDICALES
AGREE 1999-2000

GREENTECH
BIOPOLE CLERMONT LIMAGNE
63360 SAINT BEAUZIRE
BIOLOGIE BOTANIQUE
AGREE 1999-2000

ICARE
RUE DENIS PAPIN
63430 PONT DU CHATEAU
BIOLOGIE BOTANIQUE
AGREE 2000.-2001

INGÉNIERIE DE MODÈLES EN DYNAMIQUE DES SYSTÈMES
IMDYS
20 AVENUE DE ROYAT
63400 CHAMALIERE
GÉNIE DES MATÉRIAUX GÉNIE CIVIL MÉCANIQUE ACOUSTIQUE
AGREE 1999-2001

INNOVATION EN DESIGN ET DÉVELOPPEMENT DE DISPOSITIFS DE DÉLIVRANCE D'ACTIFS
ID 5
FACULTÉ DE PHARMACIE
28 PLACE HENRI DUNANT
63001 CLERMONT FERRAND CEDEX
SCIENCES PHARMACOLOGIQUES
AGREE 1999-2000

INSTITUT DE RECHERCHE BIOLOGIQUE ET PHARMACEUTIQUE
VITRO-BIO
11 ALLÉE DE LA SOURCE
63340 LE BREUIL SUR COUZE
SCIENCES MÉDICALES ET PHARMACOLOGIQUES
AGREE 1999-2001

LABORATOIRE D'EXPERTISE ET DE CONTRÔLE EN MICROBIOLOGIE ET HYGIÈNE APPLIQUÉE
LECMHA
PARC TECHNOLOGIQUE LA PARDIEU
28 RUE JEAN CLARET
63000 CLERMONT FERRAND
BIOLOGIE BOTANIQUE
AGREE 1999-2001

LIMAGRAIN GENETICS GRANDES CULTURES
DOMAINE DE MONS-AUBIAT B.P. 1
63720 CHAPPES
SCIENCES AGRONOMIQUES ET ALIMENTAIRES
AGREE 1999-2000

NUCLEICA
BIOPOLE CLERMONT LIMAGNE
63360 SAINT BEAUZIRE
BIOLOGIE
AGREE 1999-2003

SODIAAL INTERNATIONAL LES FROMAGERIES RICHES MONTS
CENTRE DE RECHERCHE DE BRIOUDE
2 RUE CHOMAGET
43100 BRIOUDE
SCIENCES AGRONOMIQUES ET ALIMENTAIRES
AGREE 1999-2003

B/ Dossier 2004 d'agrément au crédit d'impôt-recherche de la société Imdys, volet scientifique

PROJET N°1 **MODELISATION DU COMPORTEMENT DYNAMIQUE DES ELASTOMERES CHARGES**

1/ Etat de l'art au stade initial et recherches bibliographiques

Les élastomères chargés en noir de carbone ou en autres charges (silice par exemple) sont des produits de grande diffusion. Leur comportement mécanique et dynamique présente des particularités qui les distinguent des matériaux viscoélastiques classiques : ils présentent notamment une grande non linéarité dans leur réponse à la déformation. Raides aux faibles amplitudes, ils s'assouplissent aux amplitudes moyennes, pour retrouver une raideur plus élevée aux grandes déformations. Divers modèles concurrents ont été proposés pour rendre compte de ces observations. Aucun n'est universellement accepté. Dans une perspective d'identification expérimentale, certains reposent sur un nombre excessif de paramètres.

2/ Objectifs visés, performances à atteindre, contraintes

Le but poursuivi est de disposer d'un modèle rendant compte du comportement dynamique (module d'Young complexe aux différentes amplitudes de déformation), qui soit assez simple, stable, et proche des mesures pour pouvoir donner lieu à une identification expérimentale. La condition de minimalité des paramètres à identifier est très importante, comme dans toute modélisation, mais ici il est de plus souhaitable que le modèle s'insère

dans la famille des modèles phénoménologiques de la rhéologie, famille de modèles qui a structuré le mode de pensée des praticiens des mesures.

3/ Difficultés à surmonter, problèmes à résoudre

La confidentialité des travaux des caoutchoutiers fait que les résultats les plus utiles ne sont probablement pas publiés. Le modèle dont on s'est inspiré (Coveney et Johnson, Rubber Chemistry and Technology, 1999) repose sur un très petit nombre de paramètres, mais combinés en un nombre idéalement infini de degrés de liberté. Ces degrés de liberté correspondent aux agrégats de charges, qui interagissent entre eux et avec la matrice viscoélastique selon une grande variété d'échelles. La géométrie complexe, voire fractale, des liens réversibles entre agrégats et entre matrice et agrégats, est l'origine physique des difficultés de modélisation de ces matériaux.

4/ Description des travaux de R&D : non détaillée ici

PROJET N°2:

EVALUATION DE L'ATTENUATION DES ONDES ACOUSTIQUES SE PROPAGEANT DANS LES PIPELINES ENFOUIS

1/ Etat de l'art au stade initial et recherches bibliographiques

La détection et la localisation de fuites sur pipe-lines et autres canalisations (eau notamment) se fait couramment avec la technique d'intercorrélation sur le bruit émis par la fuite. Le contexte concurrentiel incite à améliorer les performances des produits, ou à en modifier le principe pour échapper à certaines difficultés de propriété industrielle. Les évolutions peuvent se situer à différents niveaux, depuis le contenu matériel du produit jusqu'à ses bases théoriques.

Bien que le sujet soit très ancien, des travaux récents ont encore été menés sur la propagation dans les conduites, en étudiant les divers modes de propagation, l'influence du fluide emplissant la conduite, ainsi que celle d'un solide ou d'un liquide l'entourant.

Nous ne nous intéressons qu'aux basses fréquences, très inférieures à la fréquence d'anneau, car l'atténuation est rédhibitoire aux fréquences plus élevées. Le mode appelé 'mode α ' est nettement le plus favorable, car le moins dispersif et le moins atténué. Il s'agit du mode d'onde plane fluide entraînant un gonflement, généralement faible, du tuyau.

Le milieu apporte de la dissipation par rayonnement, lorsque l'onde portée par la canalisation se propage à une vitesse qui dépasse celle des ondes dans le milieu. Ceci est vrai que le milieu soit modélisé comme un fluide ou un solide. On peut rencontrer des situations extrêmement contrastées, selon les caractéristiques de la conduite, les vitesses des ondes longitudinales et transversales, la masse volumique du sol et la fréquence. L'atténuation (en dB/km) peut varier d'un facteur 1000. Il est donc stratégique de pouvoir prévoir au mieux ces effets. Aucun système opérationnel n'est en mesure de le faire.

La bibliographie présente dans des articles récents des modèles théoriques pertinents de l'atténuation par rayonnement, mais aucun n'a été exploité de manière systématique dans des conditions réelles.

2/ Objectifs visés, performances à atteindre, contraintes

Le but poursuivi est de disposer d'un modèle représentant l'effet du sol sur la dissipation par rayonnement acoustique. Ce modèle sera intégré à un modèle plus complet d'atténuation prenant en compte les autres causes de perte d'énergie acoustique : échanges thermiques, pertes dans les matériaux, diffusion sur les hétérogénéités.

3/ Difficultés à surmonter, problèmes à résoudre

Un modèle couplé fluide-structure complet serait assez lourd à traiter (interaction fluide-structure-sol). On fait donc des approximations autorisant une résolution simplifiée.

4/ Description des travaux de R&D: non détaillée ici.

PROJET N°3

TESTS, MISE EN FORME ET DEVELOPPEMENT DE NOUVEAUX MODULES LOGICIELS DE TRAITEMENT DES DONNEES VISCOELASTIQUES MEASUREES.

1/ Etat de l'art au stade initial et recherches bibliographiques

Des travaux précédents ont montré la possibilité théorique de traitements mathématiques des données mesurées sur matériau viscoélastiques à comportement linéaire :

- possibilité de déterminer la phase du module d'Young complexe à partir du module, par transformation de Hilbert
- possibilité de déterminer la partie imaginaire du module d'Young complexe à partir de la partie réelle, également par transformation de Hilbert
- possibilité de contrôler la qualité des mesures et/ou la validité de l'hypothèse de linéarité, toujours par transformation de Hilbert.
- Possibilité de déterminer la fonction de fluage à partir de la mesure du module d'Young, par transformation de Fourier
- Possibilité de déterminer la fonction de relaxation à partir de la mesure du module d'Young, par transformation de Fourier.

2/ Objectifs visés, performances à atteindre, contraintes

On désire maintenant passer à un stade opérationnel. Pour cela il convient de tester la technique sur des données réelles de matériaux connus, puis d'écrire et de valider des algorithmes compatibles avec le besoin de traitement instantané sur ordinateur personnel.

4/ Difficultés à surmonter, problèmes à résoudre

Les données à exploiter sont des « courbes maîtresses » obtenues grâce à l'équivalence temps-température, ou loi 'WLF'. Elles couvrent des étendues fréquentielles considérables, pouvant aller jusqu'à 20 décades. Ceci exclut l'utilisation des algorithmes classiques de transformation de Hilbert, à base de FFT (transformation de Fourier numérique discrétisée). L'ampleur de la tâche n'a pas permis une exploitation complète des

possibilités de ces techniques. Certains points restent à traiter par la suite, comme la production systématique des courbes de fluage / relaxation à partir des « courbes maîtresses », ou l'optimisation de l'application du principe WLF à la construction de ces mêmes courbes maîtresses.

5/ Description des travaux de R&D: non détaillée ici.

Annexe 4 : Brevets

<p>(19) RÉPUBLIQUE FRANÇAISE</p> <p>INSTITUT NATIONAL DE LA PROPRIÉTÉ INDUSTRIELLE</p> <p>PARIS</p>	<p>(11) N° de publication : 2 546 631 <small>(à utiliser que pour les commandes de reproduction)</small></p> <p>(21) N° d'enregistrement national : 83 09026</p> <p>(51) Int Cl³ : G 01 S 15/02; G 01 V 1/38.</p>	
(12)	BREVET D'INVENTION	B1
<p>(54) Procédé et dispositif de positionnement acoustique sous-marin et de visualisation dans une structure connue immergée en treillis tubulaire.</p>		
<p>(22) Date de dépôt : 27 mai 1983.</p> <p>(30) Priorité :</p> <p>(43) Date de la mise à disposition du public de la demande : BOPI « Brevets » n° 48 du 30 novembre 1984.</p> <p>(45) Date de la mise à disposition du public du brevet d'invention : BOPI « Brevets » n° 35 du 30 août 1985.</p>	<p>(60) Références à d'autres documents nationaux apparentés :</p> <p>(71) Demandeur(s) : Société anonyme dite : METRAVIB. — FR.</p> <p>(72) Inventeur(s) : Joël Charles, Lionel Gaudriot et Jean-Marc Parot.</p> <p>(73) Titulaire(s) :</p> <p>(74) Mandataire(s) : Beau de Loménie.</p>	
<p>(56) Liste des documents cités dans le rapport de recherche :</p> <p><i>Se reporter à la fin du présent fascicule</i></p>		

FR 2 546 631 - B1

Vente des fascicules à l'IMPRIMERIE NATIONALE, 27, rue de la Convention — 75732 PARIS CEDEX 15

5-16848

12/16/86

4,628,737

[11] Patent Number: 4,628,737

[45] **Date of Patent:** Dec. 16, 1986

[56] **References Cited**

3,426,585	2/1969	Zemanek, Jr. et al.	73/622
4,001,764	1/1977	Holland et al.	73/40.5 A
4,102,203	7/1978	Sylvester et al.	73/620
4,128,011	12/1978	Savage	73/594
4,481,818	11/1984	Hellquist	73/587

FOREIGN PATENT DOCUMENTS

OTHER PUBLICATIONS

H. Crohas et al., *Oil & Gas Journal*, Damage-Detection Monitoring Method for Offshore Platforms is Field-Tested, vol. 80, No. 8, Feb. 1982, pp. 94,99, 100 and 103.

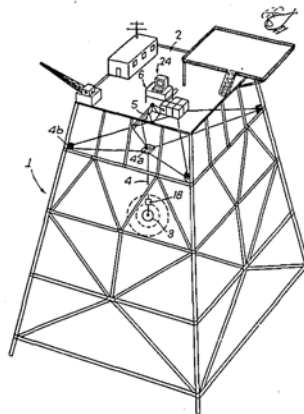
Primary Examiner—Stephen A. Kreitman

[57] **ABSTRACT**

The ultrasonic pulse-echo method for locating and characterizing flaws in a partly submerged metal structure utilizes a device comprising an acoustic antenna (3), means (18) for preprocessing the echo signals, data transmission means (23-23') and a central processing unit (6).

11 Claims, 10 Drawing Figures

[58] **Field of Search** 73/624, 606, 607, 620,
73/625, 626, 627, 628, 629, 641, 602, 594;
367/7, 11, 87, 99, 100, 117, 131



Annexe 5 : Liste de contrats de Recherche

On ne recense ici que les rapports les plus importants, à l'exclusion des propositions de travaux, notes internes, etc...

Travaux couverts par la confidentialité :

En acoustique du contact pneu-chaussée : MFPM (Manufacture française de pneumatiques Michelin).

En acoustique sous-marine : certains travaux pour l'ex-CERDAN (Centre d'étude et de Recherche en Discretion acoustique navale), la DCN (Direction des constructions navales) Toulon, l'ECAN (Etablissement de construction d'armes navales) Saint-Tropez. Sur d'autres thèmes : PSA (Automobiles Peugeot).

Travaux pour le MRT (Ministère de la recherche et de la technologie) réalisés sous ma responsabilité

Modélisation non-linéaire de suspension élastomérique : couplage élasto-thermique. Action concertée « mécanique ». Aide 84 S 0980.

Identification de forces excitatrices.

Action concertée « mécanique-vibration ». Collaboration avec le LMA de Besançon (Pr. Lallement). Aides 83 S 0775 -0776.

Modélisation de systèmes articulés réels en dynamique. Application aux compresseurs. Action concertée « mécanique-robotique ». Aide 86 P 0029

Optimisation dynamique d'un ensemble rotor-paliers avec prise en compte du bâti. Collaboration avec l'INSA de Lyon (Pr. Lalanne). Aide 87 E 0137.

Mise en œuvre industrielle d'une procédure de recalage appliquée à une structure support d'essais. Collaboration avec le LMA Besançon et la SOPEMEA. Aide 87 0135.

Rapports rédigés en exécution de contrats

JM PAROT: Rapport final (sur le calcul d'acoustique de dôme sonar par formulation intégrale), Fév. 1979, pour la DCN Toulon.

JM PAROT, H. DEBEURET: Calcul de la réponse dynamique d'une coque à une onde acoustique à front raide, rapport final, Déc. 1979 pour la DRET (Direction des Recherches, Etudes et Techniques de la DGA).

JM PAROT, J. BOSSON: Etude de faisabilité d'une maquette aéroélastique d'aéroréfrigérant, rapport final, partie Metravib, Mars 1980 pour EDF.

JM PAROT, P. AILLAUD: Essais Amédée : compte-rendu des essais et dépouillement des enregistrements, Juin 1980, pour le CEA.

JM PAROT: Problème de rupture des chargements BIAS, Juil. 1980, pour la SNPE (Société nationale des poudres et explosifs).

JM PAROT, P. AILLAUD: Essais Mimosa : compte-rendu des essais et dépouillement des enregistrements, Nov. 1980, pour le CEA.

JP BERHAULT, J. LARCHER, JM PAROT: Influence de l'acoustique sur l'alimentation des moteurs Viking du L140 d'Ariane, Déc. 1980 pour le CNES.

JM PAROT, H. DEBEURET, H ARBEY, N. TRAN-DUC: Son pur émis par l'action d'un écoulement sur une structure périodique à cavités ouvertes, Sept. 1981 pour la DGRST (Délégation générale à la recherche scientifique et technique).

JM PAROT, H. DEBEURET: Sur le problème du son pur émis par les isolateurs soumis au vent, partie Metravib, Déc. 1981 pour la société CEREVER (actuellement SEDIVER).

JM PAROT: Elaboration d'un programme d'exploitation de données. Essais en mer. Synthèse, Fév. 1982, pour la DCN Toulon.

J. LARCHER, JM PAROT: Aberrations de dômes sonar : synthèse et travaux complémentaires, Aout 1982, pour la DCN Toulon.

B. GARNIER, J. LARCHER, JM PAROT, G. PINNA: Interaction onde de choc – coque de sous-marin, Nov. 1982, pour la DRET.

J. LARCHER, JM PAROT: Etude de dôme pour antenne sphérique, Mars 1983, pour la DCN Toulon.

JM PAROT: Synthèse sur la similitude appliquée à la réalisation de dômes sonar, Jan. 1984, pour la DCN Toulon.

JM PAROT, J. LARCHER: Méthodes statistiques permettant des variations spatiales, Avr. 1984 pour la DCN Toulon.

JM PAROT: Etude des mécanismes d'enfouissement dans les fonds sédimentaires marins (thème 1 : enfouissement par transport de sédiment), Jan. 1985, pour la DRET.

D. RETOURNE, JM PAROT: Développement et évaluation d'un moyen d'aide à la conception des chenilles pour véhicule de combat, Réflexion – modélisation : Sep. 1984 ; Sous-modèle vibration de chenille : Mai 1985.

JM PAROT, D. VAUCHER DE LA CROIX: Terminaisons à haute densité modale – structures ramifiées, Juil. 1985, pour le STCAN.

E. BLANC, J. LARCHER, JM PAROT: Etude complémentaire sur l'interaction onde de choc – coque de sous-marin, rapport final, Fév. 1986, pour la DRET.

M. FINZY, JM PAROT: Etude théorique des problèmes liés au déconfinement, Fév. 1986, pour le STCAN.

S. GRIOTTIER, JM PAROT: Calcul numérique 3-D des propriétés acoustiques des dômes sonar, Mai 1986 pour la DCN Toulon.

M. FINZY, JM PAROT: Application des méthodes stochastiques à la dynamique des structures, Jan. 1987 pour le STCAN.

JM PAROT: Etude prospective sur les nouvelles voies de recherche actuellement suivies en acoustique et hydroacoustique et applicables à l'amélioration des sonars, Mai 1987 pour la DCN Toulon.

JM PAROT, M. FINZY: Structures floues et leur raccordement. Rapport intermédiaire, Aout 1987, pour la DCN Toulon.

JM PAROT, J. LARCHER: Description de champs acoustiques par fronts d'onde, Mai 1988, pour la DRET.

P. CELLARD, JM PAROT: Aide à l'implantation d'antenne multifaisceau, document final, Avr. 1989 pour l'IFREMER.

JM PAROT, M. FINZY: Application du concept d'équirésonance aux milieux destinés à l'absorption acoustique, Nov. 1989, pour la DCN Toulon.

JM PAROT, D. VAUCHER DE LA CROIX, D. DOIZELET: Etude de la faisabilité d'un calcul vibroacoustique applicable aux structures de satellites. Rapport de synthèse théorique, Nov. 1989 pour le CNES.

J. LARCHER, JM PAROT: Définition d'un logiciel de raccordement en dynamique, Déc. 1989 pour la DCN Toulon.

J. LARCHER, JM PAROT: Autosimilitude fonctionnelle en modélisation de champs aléatoires dynamiques, Fév. 1991, pour la DRET.

JM PAROT: Analyse de choc à l'eau – synthèse bibliographique critique, Mai 1991 pour Thomson-Sintra Acoustique sous-marine.

C. THIRARD, JM PAROT, B. VINCENT: Vers une évaluation en temps réel de la gêne sonore basée sur la technique des réseaux neuronaux. Synthèse de la loi de gêne par réseau de neurones artificiels, Nov. 1991, pour le ministère de l'environnement.

JM PAROT: Analyse d'antibiogrammes par réseaux de neurones artificiels. Etude de faisabilité, Juil. 1992, pour BioMérieux.

JM PAROT: Apport de la technique des réseaux neuronaux à la prévision des pointes de trafic, Sep. 1993, pour le SETRA (Service technique des routes et autoroutes).

JM PAROT: Confort vibro-acoustique : établissement d'un indicateur, Déc. 1993, pour Aérospatiale.

JM PAROT, J. LARCHER: Restitution de paramètres hydrologiques à partir de la densité, Oct. 1995, pour le CMO-BRESM du SHOM (Service Hydrographique et Océanographique de la Marine).

JM PAROT: Propagation. Effet sur la localisation des sources, Mai 1996, pour Metravib.

JM PAROT, T. MAZOYER: 1-D model for wear instability, Aout 1997, dans le cadre du projet Brite Eurosabot.

JM PAROT: Absorption active du bruit en milieu extérieur, Avr. 1998 pour le Comptoir des Technologies.

JM PAROT: Projet LIFE-Diapason : Observatoire de l'environnement urbain – Eléments de bibliographie sur les modèles de propagation acoustique, Oct. 1998 pour le grand LYON.

JM PAROT: Retournement temporel : expériences numériques d'imagerie dans le cas d'un radiateur sphérique, Mars 2002, pour Metravib.

JM PAROT: Transformation de Hilbert et traitement de données de mesure au viscoanalyseur, Juin 2002, pour Metravib.

JM PAROT: Essai de localisation de source impulsive par retournement temporel en présence d'obstacle, Juil. 2002, pour Metravib.

JM PAROT: Traitement de données de matériaux viscoélastiques non linéaires. panorama des actions possibles, février 2003 pour 01dB-Metravib.

JM PAROT: Harmoniques paires et impaires dans la réponse des matériaux viscoélastiques à une excitation sinus, Juin 2003, pour Metravib.

JM PAROT: Analyse scientifique du processus de calcul du rayonnement acoustique de structures ouvertes par formulation intégrale, Août 2004, pour l'INRS.

JM PAROT: Modèle de réponse d'une couche de fluide visqueux au contact d'une plaque en flexion, Sep. 2004, pour 01db - Metravib.

Y. AOUES, G. DEFAUX, JM PAROT: Réalisation d'un outil logiciel de modélisation prévisionnelle et d'optimisation des capotages et habillages de machines, Nov. 2004, pour l'INRS.

JM PAROT: Fonction de transfert de fuite, déc. 2004, pour 01db – Metravib.

JM PAROT: Implémentation de la FMM 1 niveau dans Bemhole. Nouvelle version modifiée et augmentée, mars 2007, pour INRS.

JM PAROT: Test de nouvelles fonctionnalités: mise en place de la FMM pour les corps fermés et actions prévues à l'étape 3 de la convention, juillet 2007, pour Phimeca Engineering.

Contrat de conseil :

pour la Société 01db-Metravib, reconduit annuellement depuis 1990 jusqu'en 2006.

Annexe 6 : Liste de projets de cinquième semestre et stages de fin d'études

Remarque: la base de données est incomplète. On se limite aux années les plus récentes.

Stages de fin d'études

GORI Jean-Pierre	2004	TAT INDUSTRIES FNI - GARONS	Etudier la faisabilité d'intégrer dans les hangars de maintenance existants une cellule modulaire de peinture
SGARBI Thomas	2003	EDF DIVISION R&D - MORET/LOING	Couplage mécano fiabiliste avec utilisation de gradients
CHAMBON Guillaume	2003	INDUSTEEL CREUSOT - LE CREUSOT	Réalisation d'essais sur simulateur thermo-mécanique. Mise en place de modèles mécaniques.
SITERRE Géraud	2002	ACSON - LYON	Etudes d'impact et de correction acoustique
DELERIS Marc	2002	RENAULT TECHNOCENTRE - GUYANCOURT	Simulation de déploiement d'Airbag

Projets de cinquième semestre

COLLIN Sylvain et FARDOUET Florian	2006	LRPC CLERMONT	Acoustique des deux-roues : modélisation de l'échappement
LABROUSSE Florent et ZALACHAS Nicolas	2006	LRPC CLERMONT	Acoustique du deux-roues : modélisation acoustique et compléments expérimentaux
QUEMENER VEREZ	2006	LRPC / IFMA CLERMONT AUBIERE	Reconception de banc de test de silencieux d'échappement
FONTAINE	2005	LRPC	Modélisation de la réponse acoustique de

Annexe 6: Liste des projets de cinquième semestre et stages de fin d'études

Aurélien		CLERMONT	pots d'échappement de motos
EHRHOLD Thomas GUIRALDENQ Nicolas	2005	LRPC CLERMONT	Acoustique d'un moteur de deux roues : Approche expérimentale
LAMERANT Félix et GRIVOTTE Nicolas	2005	LRPC CLERMONT	Etude expérimentale de l'acoustique d'un pot d'échappement
LAVAL Vincent et SIMEONI Laure	2005	LRPC CLERMONT	Modélisation du bruit de moteur de deux- roues
FULGENCE Olivier et MONTAGUT Benjamin	2004	LaMI AUBIERE	Recherche de sources impulsives en solide élastique par retournement temporel
VERNIER Frédéric et CLIQUET Sébastien	2004	VALEO ANNEMASSE	Signature acoustique de switches automobiles
LEUNG Valentin et BLATMAN Géraud	2003	LaRAMA AUBIERE	Mise en route et utilisation du code ASTRYD sur Linux
SITERRE Gérald et FRAYSSE Benjamin	2002	MAIRIE D'ISSOIRE - ISSOIRE	Analyse expérimentale et par simulation d'un problème de bruit urbain

Annexe 7 : Liste des stages techniques

Stages encadrés par J-M Parot comme tuteur, depuis 2000.

ALCAN RHENALU - ISSOIRE Cedex

FREY Jean-Gabriel -

- du 02/06/2003 au 31/07/2003

Formaliser le savoir faire de l'atelier de rectification. Etablir ou participer à la rédaction des méthodes

APROPORT - Chalon sur Saône

JOLLY Marc -

- du 01/06/2004 au 31/07/2004

Analyse technique des principales activités pour en dégager les procédures d'exploitation

AUBERT ET DUVAL - LES ANCIZES Cedex

RANOU Nicolas -

- du 29/05/2000 au 28/07/2000

Etude de la théorie du dressage (RDM), découverte des différentes machines utilisées.

CEA CADARACHE - ST PAUL LES DURANCE

MINCK Alban -

- du 05/06/2001 au 31/08/2001

Etude d'un modèle de viscosité du Corium. Expérimentation et modèle

CERMEX - CORCELLES LES CITEAUX

MOUSTRILLE Marie-Pierre -

- du 27/05/2002 au 19/07/2002

Elaboration d'un outil d'aide au calcul

DCN SERVICE BREST - BRESTCEDEX 2

MALVEZIN Raphaël -

- du 05/06/2001 au 05/08/2001

Optimisation et calcul de produits (structures)

GAGNE SA - LE PUY CEDEX

MATTRAND Cécile -

- du 29/05/2006 au 29/07/2006

Etude d'une structure en zone sismique. Application des règles parasismiques PS92

GAZ DE FRANCE - SAINT DENIS LA PLAINE Cedex

LEUNG Valentin -

- du 10/06/2003 au 05/09/2003

Mise en oeuvre informatique de la norme RPF101 sur l'acceptation de corrosions sur tubes de transport

INRETS - SALON DE PROVENCE

DELAHAYE Fanny -

- du 28/05/2001 au 11/08/2001

Validation de modèles dynamiques de véhicules à partir d'essais et leur application à des accidents

INST.DE RECHERCHE SUB-ATOMIQUE - STRASBOURG

BENSALAH Samir -

- du 02/06/2003 au 11/07/2003

Etude de la tenue aux vibrations dues aux transports routiers et dues aux séismes

INST.DE RECHERCHE SUB-ATOMIQUE - STRASBOURG

BRASA Aurore -

- du 06/06/2005 au 30/07/2005

Etude du comportement dynamique de la prochaine structure du micro CT (scanner à rayons X)

ITC - CLERMONT-FERRAND CEDEX 1

LE MOAL Valérie -

- du 29/05/2006 au 11/08/2006

Calculs de structures, modélisation aux éléments finis 3D et études dynamiques.

ITC - CLERMONT-FERRAND CEDEX 1

MORIN Caroline -

- du 30/05/2005 au 29/07/2005

Calculs de structures, modélisation aux éléments finis 3D et études dynamiques

ORGANIGRAM' - SAINT DENIS

TACHOIRE Raphaël -

- du 29/05/2000 au 28/07/2000

Management

POMAGALSKI SA - VOREPPE

FERRAND Yannick -

- du 31/05/2004 au 27/08/2004

Assister l'Ingénieur système pour la configuration technique opérationnelle.

RECIF SA - AUSSONNE

FRISONI Yannick -

- du 27/05/2002 au 08/08/2002

DU développement du cahier des charges à la réalisation de module Robotique

SAINT GOBAIN PAM - MAIDIERES LES PONT A MOUSSON

MARTZ Jocelyn -

- du 13/06/2005 au 12/08/2005

Etudes et essais de verrouillage de canalisations en fonte ductile.

SINTEC - CLERMONT-FERRAND

PINAULT Valérie -

- du 05/06/2000 au 01/08/2000

Etudes pour MSD Chibret au sein du BE (CALDA)

SOL SOLUTION - RIOM

DEHEEGER François -

- du 27/05/2002 au 26/07/2002

Etude du comportement dynamique d'un pénétromètre dynamique léger à énergie variable : le PANDA

SPRIA - TARBES

FANTIN Nicolas -

- du 03/06/2003 au 22/08/2003

Etablissement de corrélation théorique entre calculs statiques et résultats de tenue mécanique en tir pyrotechnique

THALES SAFARE - SOPHIA ANTIPOLIS

RAINAUT Olivier -

- du 28/05/2001 au 27/07/2001

Recherche de matériaux pour applications d'acoustique sous-marine

THYSSENKRUPP PRESTA FRANCE - FLORANGE Cedex

PERRIN Christophe -

- du 01/06/2004 au 20/08/2004

Amélioration des processus de contrôle qualité sur lignes de montage.

VALEO VISION – ECOUFLANT

CABILLIC Julien -

- du 02/06/2003 au 31/08/2003

Analyse par simulations Radioss et essais d'un projecteur soumis à des impacts piétons.

Annexe 8 : Poste occupé précédemment

Lettre de Reynald Seznec, ancien Directeur général France des activités sous-marines chez Thalés, actuellement Directeur général des opérations et Senior Vice-President chez Thalés :



173, boulevard Haussmann
75415 Paris Cedex 08
FRANCE
Tél. : +33 (0)1 53 77 80 00
www.thalesgroup.com

RS/cv 056-02

Bagneux, le 3 mai 2002

Messieurs,

M. Jean-Marc PAROT m'a récemment fait part de son projet professionnel et de son rapprochement éventuel avec l'Enseignement et la Recherche publics ou privés.

Je connais M. Parot depuis une vingtaine d'années, et il a été mon collaborateur direct pendant sept ans, alors que j'étais notamment Directeur Général de Métravib RDS (société de Recherche sous contrat).

Il a fortement contribué à l'animation scientifique d'importantes équipes d'ingénieurs, chargées de projets de recherche pour le compte de la Défense (DRET, DCN), de l'Industrie (Michelin) et en coopération avec l'Université, le CNRS ou certains établissements publics (EDF, CNES).

M. Parot s'est également investi dans l'encadrement de DEA ou de Thèses réalisées dans des laboratoires de la région lyonnaise (ECL, INSA).

Ses compétences scientifiques très vastes lui ont permis d'aborder de manière nouvelle et créative des problèmes ardues de modélisation mathématique couvrant tout aussi bien la mécanique de fluides, les vibrations, l'acoustique ou leurs couplages dans les domaines linéaires et non linéaires.

Les clauses de confidentialité attachées aux contrats traités par M. Parot, ainsi que le cadre économique dans lequel ses travaux de recherche étaient effectués, n'ont pas toujours permis la publication des résultats obtenus dans des revues à diffusion internationale.

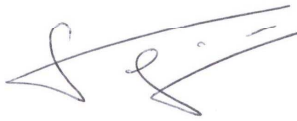
.../...

THALES : S.A. au capital de 503 194 539 Euros
Siège social : 173, boulevard Haussmann - 75008 Paris - France - 552 059 024 RCS Paris

Néanmoins, la personnalité de M. Parot, sa créativité, son sens de la pédagogie, son positionnement à la croisée de la théorie et de l'application, du monde académique et de l'industrie, son expérience du management d'équipes scientifiques, sont à mon sens tout à fait remarquables.

Je souhaite donc par la présente marquer l'intérêt important que le talent et l'esprit d'ouverture de Jean-Marc Parot me semblent représenter pour l'Enseignement et la Recherche, dans le domaine des Sciences de l'Ingénieur.

Je vous prie de croire, Messieurs, en l'assurance de mes salutations les plus distinguées.



Reynald SEZNEC
X.73, Corps des Ponts et Chaussées
Docteur en Physique
THALES
Senior Executive Vice President
Business Group Air Defence

Photocopie d'annonce me cherchant un successeur:

Le Monde
CADRES

... Le Monde • Mercredi 25 octobre 1989 37

Le système télématique expert de l'emploi des cadres 3615 CM

Vibrations, Acoustique, Matériaux

CHEF DE DEPARTEMENT MODELISATION

Filiale d'un groupe français de réputation mondiale, cette Société (120 personnes, 62 MF) développe des activités de Recherche et Développement et d'assistance industrielle dans le domaine des vibrations et de l'acoustique sur des marchés tels que l'Armement, l'Aéronautique, l'Industrie automobile. Pour prendre en charge son Département "Modélisation", elle recherche un Ingénieur de haut niveau.

Rattaché directement au Directeur Général et membre du Comité de Direction, il assure l'animation d'un service de 15 personnes qu'il gère comme un centre de profit. Responsable de la gestion humaine de son équipe, il a pour mission de "produire" et de mener à bien de gros projets en suivant les réalités du marché et en développant sa technicité.

Agé de 32-35 ans, de formation Ingénieur Grande Ecole (X, Ponts, Mines, Centrale) ou Universitaire complétée par une thèse, mécanicien ou physicien, il connaît l'acoustique, les vibrations, la mécanique des fluides et/ou le traitement du signal sous leur angle théorique et numérique.

Scientifique et gestionnaire, il est un meneur d'hommes autonome, capable de faire grandir un groupe sur tous les plans.

Le poste est basé à Lyon, au sein d'une équipe jeune composée en majorité d'Ingénieurs et de Techniciens.

Merci d'adresser lettre de candidature, CV complet, photo et rémunération actuelle sous réf. M 18/3354 A à :

EGOR RHONE-ALPES
Tour du Crédit Lyonnais
129, rue Servient - 69431 LYON CEDEX 03

EGOR

PARIS BORDEAUX LILLE LYON NANTES STRASBOURG TOULOUSE - BELGIQUE DANMARK DEUTSCHLAND ESPANA ITALIA NEDERLAND PORTUGAL UNITED KINGDOM

Références bibliographiques

- ¹ SERRES M.: Rameaux, 2004. Editions le Pommier, Paris.
- ² PAROT J.-M.: Localizing impulse sources in an open space by time reversal with very few transducers. *Applied Acoustics*, vol. 69/4, 2008, p. 311-324.
- ³ PAROT J.-M., Exercices de dynamique, 2000. Documentation IFMA.
- ⁴ PAROT J.-M., Problème de la détection de fuites: modélisation de la propagation dans un conduit enfoui. Rapport pour la société 01dB/Metravib, 2003.
- ⁵ MUGGLETON J. M., BRENNAN M. J. , PINNINGTON R. J.: Wavenumber prediction of waves in buried pipes for water leak detection. *Journal of Sound and Vibration* 249, vol. 5, 2002.
- ⁶ PAROT J-M , DEBEURET H.: Calcul de la réponse dynamique d'une coque à une onde acoustique à front raide. Colloque 'Tendances actuelles en calcul des structures', Sophia-Antipolis, 1982 (8 pages).
- ⁷ PAROT J-M: Calcul de la réponse dynamique d'une coque à une onde d'explosion. Journées d'études GAMI « Vibrations-Chocs », Lyon 1982, et Mécanique, Matériaux et Electricité n° 389-390-391, 1982, p 343-348.
- ⁸ LAPSHIN B. M., NIKOLAEVA E. D , RUBINOVICH I. M: Analysis of attenuation of sound in a pipe with a liquid in acoustic emission inspection of leak tightness of product pipelines. *Defektoskopiya*, vol. 2, 1991.
- ⁹ ARBEY H., DELCAMBRE J., MICHAUD R., MOREAU M., PARGAMIN L., PAROT J-M: Les bruits éoliens des lignes électriques. Conférence Internationale des Grands Réseaux Electriques (CIGRE), Stockholm, 1981. (232-05, 6 pages).
- ¹⁰ ARBEY H., DELCAMBRE J., PARGAMIN L., PAROT J-M: Son pur émis par un système de cavités périodiques ouvertes soumis à un écoulement. Huitième colloque d'acoustique aéronautique, Toulouse 1982, et Revue d'Acoustique n° 67, 1983, p. 243-246.
- ¹¹ PAROT J-M , THIRARD C. , PUILLET C.: Elimination of a non-oscillatory instability in a retarded potential integral equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 31/2, 2007, p. 133-151.
- ¹² POLONIO F., LOYAU T., PAROT J-M , GOGU G.: Acoustic radiation of an open structure: modelling and experiments. *Acta Acustica united with Acustica*, vol 90, 2004, p. 496-511.
- ¹³ AVALLET C., PAROT J-M: Analyse vibratoire et acoustique par une méthode de matrices de transfert, de coques à renforts périodiques immergées dans un fluide lourd et compressible.

Onzième ICA (International Congress on Acoustics), Paris-Lyon-Toulouse 1983, Vol. 5, p. 21-24.

¹⁴ AVALLET C., PAROT J-M: Application de la méthode des matrices de transfert à l'étude acoustique et vibratoire de coques cylindriques raidies immergées dans un fluide lourd et compressible. Sixième congrès français de Mécanique, Lyon 1983, p. 9/13 -9/16.

¹⁵ AVALLET C., PAROT J-M : Recherche d'ondes naturelles de coques cylindriques raidies périodiquement. Journées d'Etude sur la Propagation Acoustique (JESPA) 1982, le Havre, et Revue du Cethedec n° 71, p 159-173.

¹⁶ AVALLET C., PAROT J-M: Etude, par une méthode de matrices de transfert, des vibrations in vacuo de coques cylindriques minces périodiquement raidies. Onzième ICA (International Congress in Acoustics), Paris-Lyon-Toulouse 1983, Vol. 10, p. 221-224

¹⁷ FICHOT D., VAUCHER DE LA CROIX D., PAROT J-M: Traitement des problèmes numériques dûs aux ondes évanescentes dans les méthodes de type matrice de transfert. 4^{ème} Congrès Français d'Acoustique, Marseille, avril 1997, Vol. 2, p. 703-706.

¹⁸ ANCEY S. , DÉCANINI Y., FOLACCI A., GABRIELLI P. : Surface polaritons on metallic and semiconducting cylinders: A complex angular momentum analysis, Physics Review B (2004).

¹⁹ PAROT J.-M., BOUZGARROU C.: Cours de dynamique, 2005. Documentation IFMA.

²⁰ PAROT J-M: How accurate can be ray computation in the atmosphere? EURONOISE 95, Lyon, mars 1995, p.277-282.

²¹ PALMER D. R., GEORGES T. M., JONES R. M.: Chaotic ray paths in underwater acoustics. Premier Congrès français d'acoustique, Lyon, 1990, colloque C2, supplément n°2, 51, p. 965-968.

²² SMITH K. B., BROWN M. G., TAPPERT F. D.: Acoustic ray chaos induced by mesoscale ocean structure. J. Acoust. Soc. Am. (1992), **91**, 1950-1959.

²³ COLLINS M. D., KUPERMAN W. A.: Overcoming ray chaos. J. Acoust. Soc. Am. (1994), **95**, 3167-3170.

²⁴ SMIRNOV I. P., VIROVLYANSKY A. L., ZASLAVSKY G. M.: Theory and applications of ray chaos to underwater acoustics. Physical review E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics, 2001, vol. **64**, 3.

²⁵ TAPPERT F. D.: Theory of explosive beam spreading due to ray chaos. Journal of the acoustical Society of America, 2003, vol. **114**, 5, p. 2775-2781.

²⁶ COLLINS M. D., LINGEVITCH J. F.: Secular behavior and breakdown of chaotic ray solutions. IEEE Journal of oceanic engineering, 1999, vol. **24**, 2, p. 232-236.

- ²⁷ NOËL C., VIALA C., STEPHAN Y.: A study of hybrid and chaotic long range propagation in a double sound channel environment. IEEE Journal of oceanic engineering, 1999, vol. **24**, 4, p. 447-457.
- ²⁸ PAROT J-M: Contribution à l'étude des écoulements bidimensionnels quasi-horizontaux de deux couches de densités différentes. Thèse Paris VI, 1976
- ²⁹ THORPE S. A.: Near resonant forcing in a shallow two layer fluid: a model for the internal surge in Loch Ness ? J. Fluid Mechanics, 1974, vol. **63**, 3, p. 509-527.
- ³⁰ BOULOT F., BENQUE J-P, PAROT J-M: Un modèle mathématique des courants dans une eau stratifiée en bicouche. XIV^{èmes} Journées de l'Hydraulique, Question II, rapport 3 (6 pages). Société Hydrotechnique de France (SHF), 1976, Paris.
- ³¹ STAQUET C: Déferlement de la marée interne et mélange. http://www.obs.ujf-grenoble.fr/ecole_doctorale/sujets/2004/weblegil.htm
- ³² BARNIER B.: Etude numérique des interactions courant-topographie : application au gyre subpolaire, aux seuils de Gibraltar et des mers Nordiques. http://www.obs.ujf-grenoble.fr/ecole_doctorale/sujets/2004/weblegil.htm
- ³³ POLONIO F. Calcul du rayonnement acoustique d'une structure d'épaisseur moyenne comportant des ouvertures. Thèse de doctorat présentée le 02/05/2002 devant l'Université Blaise Pascal.
- ³⁴ PELLICIER A.: Algorithme de calcul accéléré pour les structures rayonnantes à vibration sous-critique. Thèse de doctorat présentée le 26/01/07 devant l'Université Blaise Pascal.
- ³⁵ POLONIO F., LOYAU T., PAROT J-M, GOGU G: Prévion du rayonnement acoustique en basse fréquence de structures ouvertes. Acoustique et Techniques n°36, mars 2004, p. 37-43.
- ³⁶ PAROT J-M, PELLICIER A., LOYAU T., GOGU G.: Fast mutipole method for acoustic radiation computations. Proposé à Acta Acustica united with Acustica, juillet 2007.
- ³⁷ CHEN L.H., SCHWEIKERT D. G.: Sound radiation from an arbitrary body. J. Acoust. Soc. Am. (1963), **35**, 1626-1632.
- ³⁸ MITZNER K. M.: Numerical solution for transient scattering from a hard surface of arbitrary shape – retarded potential technique. J. Acoust. Soc. Am. (1967), **42**, 391-397.
- ³⁹ CHENG H., CRUTCHFIELD W. Y., GIMBUTA Z., GREENGARD L. F., ETHRIDGE J. F., HUANG J., ROKHLIN V., YARVIN N., ZHAO J.: A wideband fast multipole method for the Helmholtz equation in three dimensions. Journal of Computational Physics **216** (2006) 300-325.

- ⁴⁰ DARVE E., HAVÉ P.: Efficient fast multipole method for low frequency. *J. Comput. Physics* 197 (2004) 341-363.
- ⁴¹ SCHENCK H. A.: Improved Integral Formulation for Acoustic Radiation Problem, *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 44 (1), 41-58 (1967).
- ⁴² BURTON A. J., MILLER G. F.: The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary value problems. *Proceedings of the Royal Society, London A323*, 201-210 (1971).
- ⁴³ OHAYON R., SOIZE C.: *Structural Acoustics and Vibration*. Academic Press, 1998.
- ⁴⁴ PAROT J.-M.: Implémentation de la FMM 1 niveau dans Bemhole. Nouvelle version modifiée et augmentée, mars 2007, rapport pour INRS.
- ⁴⁵ MARBURG S., SCHNEIDER S.: Performance of iterative solvers for acoustic problems. part I: Solvers and effect of diagonal preconditionning. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27, 2003, p. 727-750.
- ⁴⁶ PAROT J.-M.: Analyse scientifique du processus de calcul de rayonnement acoustique de structure ouverte par formulation intégrale, août 2004, rapport pour l'INRS.
- ⁴⁷ PAROT J.-M.: Fréquences irrégulières et surdétermination, juin 2005, rapport pour l'INRS.
- ⁴⁸ J-M PAROT, A. PELLICIER: Fast multipole method for acoustic computations. 19th ICA (International Congress on Acoustics), Madrid, septembre 2007, 6 pages.
- ⁴⁹ SCHWARZ-RÖRH B.: Scattering of sound by a hollow, hard sphere with an opening. *Acta Acustica united with Acustica*, 2006, 92, 521-529.
- ⁵⁰ SELAMET A., DICKEY N. S., NOWAK J. M.: Theoretical computational and experimental investigation of Helmholtz resonator with fixed volume: lumped versus distributed analysis. *J. of Sound and Vibration*, 1995, 187 (2) p. 358-367.
- ⁵¹ CHANAUD R. C.: Effect of geometry on the resonance frequency of Helmholtz resonator, Part II. *J. of Sound and Vibration*, 1997, 204 (5) p. 829-834.
- ⁵² FILIPPI P., DUMERY G.: Etude théorique et numérique de la diffraction par un écran mince. *Acustica* 1969; 21, p. 343-350.
- ⁵³ FILIPPI P.: Layer potentials and Acoustic Diffraction, *J. of Sound and Vibration*, 1977, 54, p. 473-500.
- ⁵⁴ KRISHNASAMY G., SCHMERR L. W., RUDOLPI T. J., RIZZO F. J.: Hypersingular boundary integral equations: some applications in acoustic and elastic wave scattering. *Transactions of the ASME* 1990; 57, p. 404-414.

- ⁵⁵ HWANG W. S.: Hypersingular boundary integral equations for exterior acoustic problems, J. Acoust. Soc. Am., Vol. 101 (6), 3336-3342 (1997).
- ⁵⁶ LIU Y., RIZZO F. J.: A weakly singular form of the hypersingular boundary integral equation applied to 3-D acoustic wave problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 96, p. 271-287 (1992).
- ⁵⁷ WU T. W., WAN T. C.: Numerical modeling of acoustic radiation and scattering from thin bodies using a Cauchy principal value integral equation, Journal of the Acoustical Society of America, 1992 92, p. 2900-2906.
- ⁵⁸ ZAI YOU KAN, KIN CHEW HUNG, HUI ZHENG: Solving the hypersingular boundary integral equation in three-dimensional acoustics using a regularization relationship. Journal of the Acoustical Society of America, 2003, 113 (5), p. 2674-2683.
- ⁵⁹ JEANS R., MATHEWS I. C.: A comparison of numerical collocation and variational procedures to the hypersingular acoustic integral operator. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 101, p. 5-26 (1992).
- ⁶⁰ MARIEM J. B., HAMDI M. A.: A new boundary finite element method for fluid-structure interaction problems, Internat. J. Numerical Methods in Engineering 24 (1987), p. 1251-1267.
- ⁶¹ GUIGGINAI M., KRISHNASAMY G., RUDOLPHI T. J., RIZZO F. J.: A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations. Transactions of the ASME, 59, 1992.
- ⁶² DEMENGEL F., DEMENGEL G.: Mesures et distributions, Théorie et illustrations par les exemples. Ellipses, 2000, Paris.
- ⁶³ SCHWARTZ L.: Théorie des distributions, Hermann, 1966-1998, Paris.
- ⁶⁴ MAZ'YA V., SHAPOSHNIKOVA T.: Jacques Hadamard, un mathématicien universel. 2005, EDP Sciences, Paris.
- ⁶⁵ MASTRONARDI N., OCCORSIO D.: Some numerical algorithms to evaluate Hadamard finite-part integrals. J. of Computational and Applied Mathematics 70, p. 75-93 (1996).
- ⁶⁶ KOLM P., ROKHLIN V.: Numerical quadratures for singular and hypersingular integrals. Computers and Mathematics with Applications, 41 (2001) p. 327-352.
- ⁶⁷ KAWAI Y. TERAU T. :A numerical method for the calculation of transient acoustic scattering from thin rigid plates. J Sound Vib 1990; 141 (1), p. 83 – 96.
- ⁶⁸ PAROT J-M , DUPERRAY B.: Applications of exact causality relationships to materials dynamic analysis. Mechanics of Materials, vol. 39/5, 2007, p. 419-433.

- ⁶⁹ PAROT J-M, DUPERRAY B.: Exact computation of creep compliance and relaxation modulus from complex modulus measurement data. *Mechanics of Materials*, vol. 40/7, 2008, p. 575-585.
- ⁷⁰ BORGIOTTI G. V. , ROSEN E. M. : The state vector approach to the wave analysis of the forced vibration of a cylindrical shell. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1993, 2, p. 864-874.
- ⁷¹ ROKHLIN V.: Diagonal forms of translation operators for the Helmholtz equation in three dimensions, *Applied and Computational Harmonic Analysis* 1 (1993), p. 82-93.
- ⁷² AMINI S., PROFIT A. T.: Multi-level fast multipole solution of the scattering problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 27 (2003), p. 547-564.
- ⁷³ SAKUMA T., YASUDA Y.: Fast multipole element method for large-scale steady-state sound field analysis. Part 1: setup and validation. *Acta Acustica* 88 (2002), p. 513-525.
- ⁷⁴ MORIN E: La méthode, 4. Les idées, leur habitat, leur vie, leurs mœurs, leur organisation, 1991, Seuil, Paris.
- ⁷⁵ SCHNEIDER S., MARBURG S.: Performance of iterative solvers for acoustic problems. Part II. Acceleration by ILU-type preconditioner. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 27, (2003), p. 751-757.
- ⁷⁶ TETSUO IWATA, HIRONOBU SHIBATA, TSUTOMU ARAKI: Extrapolation of band-limited frequency data using an iterative Hilbert-transform method and its application for Fourier-transform phase-modulation fluorometry, *Meas. Sci. Technol.* (2007), 18, 288-294
- ⁷⁷ SHARATH M. NARAYANA, GIRISH RAO, RAVIRAJ ADVE, TAPAN K. SARKAR, VINCENT C. VANNICOLA, MICHAEL C. WICKS, STEVEN A. SCOTT: Interpolation/Extrapolation of Frequency Domain Responses Using the Hilbert Transform, *IEEE Transactions on microwave theory and techniques* (1996), **44**, 10.
- ⁷⁸ PERRY, P.A.; BRAZIL, T.J.: Forcing causality on S-parameter data using the Hilbert transform, *Microwave and Guided Wave Letters*, IEEE (1998) **8**, 11, Pages 378 – 380.
- ⁷⁹ ISHIMARU: *Wave Propagation and Scattering in Random Media* 1978, Academic Press, New-York.
- ⁸⁰ BAL G., RYZHIK L.: Time reversal for classical waves in random media, *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 333, Série I, p. 1041–1046, 2001. *Physique mathématique*.
- ⁸¹ FINK M., CASSEREAU D., DERODE A., PRADA C., ROUX P., TANTER. M., THOMAS J.-L., WU F.: Time-reversed acoustics. *Report on: Progress in Physics* 1996, 63: 1933-1995.

- ⁸² BORCEA L., PAPANICOLAOU G., TSOGKA C.: Theory and applications of time reversal and interferometric imaging. *Inverse Problems* 2003; 19: 139-164.
- ⁸³ ZUMPANO G., MEO M.: A new nonlinear elastic time reversal acoustic method for the identification and localisation of stress corrosion cracking in welded plate-like structures – A simulation study. *International Journal of Solids and Structures* 44 (2007) 3666–3684.
- ⁸⁴ ULRICH T.J., SUTIN A.M., GUYER R.A., JOHNSON P.A.: Time reversal and non-linear elastic wave spectroscopy (TR NEWS) techniques. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, on line 2007.
- ⁸⁵ BAI M. R.: Application of BEM (boundary element method)-based acoustic holography to radiation analysis of sound sources with arbitrarily shaped geometries. *Journal of the Acoustical Society of America* 1992; 92: 533 – 549.
- ⁸⁶ SCHUHMACHER A., HALD J., RASMUSSEN K. B., HANSEN P. C.: Sound source reconstruction using inverse boundary element calculations. *Journal of the Acoustical Society of America* 2003; 113 (1): 114-127.
- ⁸⁷ AUGUSZTINOVICZ F., TOURNOUR M.: Reconstruction of source strength distribution by inverting the boundary element method. *Boundary Elements in Acoustics*, O. von Estorff ed., WIT Press, Southampton 2000.
- ⁸⁸ LEXING YING, BIROS G., ZORIN D.: A kernel-independent adaptive fast multipole algorithm in two and three dimensions. *Journal of Computational Physics* 196 (2004), 591-626.
- ⁸⁹ LIU Y. J., NISHIMURA N.: The fast multipole boundary element method for potential problem: a tutorial. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30, 2006, p. 371-381.
- ⁹⁰ HAITAO WANG, ZHENZHAN YAO, PENGBO WANG: On the preconditioners for fast multipole boundary element methods for 2D multi-domain elastostatics. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29, 2005, p. 673-688.